Université d'Orléans **Deug MIAS et SM**

Unité MA 3.03

Probabilités et Graphes

Corrigé abrégé de l'examen du 25 juin 2002

Exercice I 23 points

Problème 77 points

1. X_n et Y_n sont toutes deux obtenues comme la somme des indicatrices de n événements indépendant de même probabilité $1/2$, donc elles suivent chacune la loi binomiale de paramètres n et $p = 1/2$. 3 points

2. *Étude du cas* $n = 2$

   (a) M_2 est le maximum de deux nombres qui appartiennent à $\{0, 1, 2\}$: M_2 est donc à valeur dans $\{0, 1, 2\}$. 4 points

   (b) Pour que le plus grand de deux nombres positifs soit nul, il faut et il suffit que les deux soient nuls. 3 points

   (c) Pour que le plus grand de deux nombres ne dépassant pas 2 soit 2, il faut et il suffit qu'un au moins des deux soit égal à 2. 3 points

   (d)

   $$P(M_2 = 0) = P(\{X_2 = 0\} \cap \{Y_2 = 0\}) = P(X_2 = 0)P(Y_2 = 0) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

   en utilisant l'indépendance de X_2 et Y_2.

   $$\begin{aligned} P(M_2 = 2) &= P(\{X_2 = 2\} \cup \{Y_2 = 2\}) \\ &= P(X_2 = 2) + P(Y_2 = 2) - P(\{X_2 = 2\} \cap \{Y_2 = 2\}) \\ &= P(X_2 = 2) + P(Y_2 = 2) - P(X_2 = 2)P(Y_2 = 2) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\frac{1}{4} = \frac{7}{16} \end{aligned}$$

   en utilisant l'indépendance de X_2 et Y_2.
   Comme X_2 est à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$, on a

   $$1 = P(X_2 = 0) + P(X_2 = 1) + P(X_2 = 2),$$

donc

$$P(X_2 = 1) = 1 - P(X_2 = 0) - P(X_2 = 1) = 1 - \frac{1}{16} - \frac{7}{16} = \frac{8}{16}.$$

9 points

(e)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}M_2 &= 0P(X_2 = 0) + 1P(X_2 = 1) + 2P(X_2 = 2) \\ &= \frac{1 \times 8 + 2 \times 7}{16} \\ &= \frac{22}{16} = \frac{11}{8}. \end{aligned}$$

3 points

3. (a) Par définition du max, on a $X_n \leq \max(X_n, Y_n)$. Comme $Y_n \geq 0$, on a $X_n \leq X_n + Y_n$. De même, comme $X_n \geq 0$, on a $Y_n \leq X_n + Y_n$. Il s'ensuit que $M_n = \max(X_n, Y_n) \leq X_n + Y_n$. 6 points

(b) Comme $X_n \leq M_n \leq X_n + Y_n$, on a $\mathbb{E}X_n \leq \mathbb{E}M_n \leq \mathbb{E}(X_n + Y_n) = \mathbb{E}X_n + \mathbb{E}Y_n$. Comme X_n et Y_n suivent la loi binomiale de paramètres n et $p = 1/2$, on a $\mathbb{E}X_n = \mathbb{E}Y_n = n/2$, donc $u_n = \mathbb{E}M_n$ vérifie

$$\forall n \geq 1 \quad \frac{1}{2}n \leq u_n \leq n.$$

Ainsi les constantes $A = 1/2$ et $B = 1$ conviennent. 6 points

(c) Montrons que les propriétés suivantes sont équivalentes:

i. $P(V > 0) > 0$.

ii. $\exists k \in \mathbb{N}^* \quad P(V = k) > 0$.

iii. $\mathbb{E}V > 0$.

- $1 \Longrightarrow 2$ se montre par contraposée, car $P(V > 0) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(V = k)$. Ainsi, si on a $P(V = k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, alors $P(V > 0) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(V = k) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} 0 = 0$.
- $2 \Longrightarrow 3$. Si $P(V = k_0) > 0$ pour $k_0 > 0$, alors $\mathbb{E}V = \sum_{k=1}^{+\infty} kP(V = k) \geq k_0 P(V = k_0) > 0$.
- $3 \Longrightarrow 1$ se montre par contraposée: si $P(V > 0)$, alors pout tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $P(V = k) \leq P(V > 0) = 0$. Il s'ensuit que $\mathbb{E}V = \sum_{k=1}^{+\infty} kP(V = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \times 0 = 0$.

4 points

(d)

$$\{X_n = 0\} \cap \{Y_n = 1\}) \subset \{X_n = 0\} \cap \{M_n = 1\} \cap \{X_n < M_n\}.$$

Donc $P(\{X_n = 0\} \cap \{Y_n = 1\}) \leq P(X_n < M_n)$ 2 points

(e) Posons $V = M_n - X_n$. V est à valeurs positives. Or $P(V > 0) = P(X_n < M_n) \geq P(\{X_n = 0\} \cap \{Y_n = 1\}) = P(X_n = 0)P(Y_n = 1) = \frac{1}{2^n}\frac{n}{2^n} > 0$. On en déduit $\mathbb{E}V > 0$, soit $\mathbb{E}(M_n - X_n) > 0$, d'où $\mathbb{E}M_n - \mathbb{E}X_n > 0$, soit $u_n > \mathbb{E}X_n = \frac{1}{2}n$. 5 points

4. (a) Par définition, $C_k = A_k \cup B_k$. $\max(1\!\!1_{A_k}, 1\!\!1_{B_k})$ vaut 1 si $1\!\!1_{A_k}$ vaut 1 ou que $1\!\!1_{C_k}$ vaut 1, c'est à dire que l'on est dans A_k ou dans B_k, c'est à dire dans $A_k \cup B_k = C_k$, c'est à dire que $1\!\!1_{C_k}$ vaut 1. 4 points

   (b) G_n représente le nombre d'étapes de lancers pour lesquels au moins l'un des deux à réussi le lancer. 3 points

   (c) $P(C_n) = P(A_n \cup B_n) = P(A_n) + P(B_n) - P(A_n \cap B_n) = P(A_n) + P(B_n) - P(A_n)P(B_n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$. (en utilisant l'indépendance) On compte le nombre de réussites dans une série de n expériences aléatoires indépendante de même probabilité $3/4$, donc G_n suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 3/4$. 5 points

   (d) Pour tout k $1\!\!1_{A_k} \leq 1\!\!1_{C_k}$, donc $\sum_{k=1}^{n} 1\!\!1_{A_k} \leq \sum_{k=1}^{n} 1\!\!1 C_k$, soit $X_n \leq G_n$.
   De même, pour tout k $1\!\!1_{B_k} \leq 1\!\!1_{C_k}$, donc $\sum_{k=1}^{n} 1\!\!1_{B_k} \leq \sum_{k=1}^{n} 1\!\!1 C_k$, soit $Y_n \leq G_n$.
   Comme $X_n \leq G_n$ et $Y_n \leq G_n$, on a $M_n = \max(X_n, Y_n) \leq G_n$. 6 points

   (e) On en déduit
   $$u_n = \mathbb{E}M_n \leq \mathbb{E}G_n = \frac{3}{4}n,$$
   car G_n suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 3/4$. 3 points

   (f) $u_1 = \mathbb{E}M_1 = \mathbb{E}G_1 = \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \times 1$, donc $n = 1$ convient. 3 points

5. On a montré
   $$\forall n \geq 1 \quad \frac{1}{2} \leq \frac{u_n}{n}\frac{3}{4}$$
   Une partie de $\mathbb{R}$ bornée à toujours une borne inférieure et une borne inférieure. Comme $\inf_{n\geq 1} \frac{u_n}{n} = \frac{1}{2}$, si K avait un minimum, ce ne pourrait être que $1/2$. Mais $1/2$ n'est pas atteint d'après la question 3.(e), donc K n'a pas de minimum. En revanche l'inégalité établie en 4.(e) et la question 4.(f) montrent que $3/4$ est le plus grand élément de K. 5 points

FIN DE L'ÉPREUVE