Université d'Orléans **Deug MIAS et SM**

Unité MA 3.03

Probabilités et Graphes

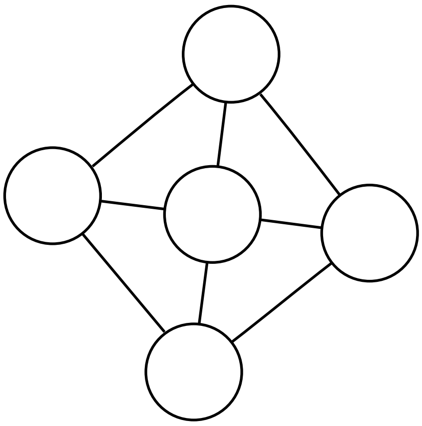
Examen du 25 juin 2002

durée: 2h

Le polycopié de cours, les notes manuscrites, et les calculatrices sont autorisés.

Exercice

1. Déterminer le polynôme chromatique P du graphe suivant ainsi que son nombre chromatique. Calculer le nombre de coloriages propres de ce graphe lorsque l'on dispose d'une palette de 4 couleurs.



2. Un jeu d'enfant contient 144 dés cubiques. Les faces de chaque dé sont numérotées de 1 à 6. La disposition relative des 6 chiffres sur les faces du dé ne varie pas d'un dé à l'autre. Le chiffre 1 est toujours écrit en noir. C'est le seul chiffre noir. En revanche, les autres chiffres peuvent être écrits en rouge, en bleu, en jaune ou en vert. Pour des raisons esthétiques, on impose que deux faces adjacentes d'un dé ne puissent avoir des chiffres de même couleur. On suppose que le jeu ne possède pas trois cubes identiques.

   On demande de montrer que chaque cube du jeu possède exactement un "jumeau" qui lui est identique.

Problème

Alain et Bernard possèdent chacun une pièce de monnaie équilibrée qu'ils lancent un grand nombre de fois.

On admettra que les résultats des lancers sont indépendants, avec une probabilité 1/2 de valoir "pile" et une probabilité 1/2 de valoir "face".

On note

$$A_n = \{\text{Alain obtient pile au } n \text{ ième lancer}\}$$

$$B_n = \{\text{Bernard obtient pile au } n \text{ ième lancer}\}$$

$$C_n = \{\text{Au moins l'un des deux obtient pile au } n \text{ ième lancer}\}$$

On note X_n (resp Y_n) le nombre de piles obtenues par Alain (resp Bernard) au cours des n premiers lancers. Ainsi

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} 1\!\!1_{A_k} \text{ et } Y_n = \sum_{k=1}^{n} 1\!\!1_{B_k}.$$

On s'intéresse dans ce problème au meilleur des deux scores, c'est à dire à $M_n = \max(X_n, Y_n)$, et plus particulièrement à son espérance: on pose donc $u_n = \mathbb{E}M_n$.

1. Quelle est la loi de X_n, la loi de Y_n ?
2. *Étude du cas* $n = 2$
   (a) Quelles valeurs peut prendre M_2 ?
   (b) Montrer $\{M_2 = 0\} = \{X_2 = 0\} \cap \{Y_2 = 0\}$.
   (c) Montrer $\{M_2 = 2\} = \{X_2 = 2\} \cup \{Y_2 = 2\}$.
   (d) Pour $k \in \{0, 1, 2\}$, calculer $P(M_2 = k)$.
   (e) En déduire $\mathbb{E}M_2 = \frac{11}{8}$.
3. (a) Montrer soigneusement
   $$X_n \leq M_n \leq X_n + Y_n.$$
   (b) Déterminer deux constantes strictement positives A et B telles que
   $$\forall n \geq 1 \quad An \leq u_n \leq Bn.$$
   (c) Soit V une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes:
   - $P(V > 0) > 0$.
   - $\exists k \in \mathbb{N}^* \quad P(V = k) > 0$.
   - $\mathbb{E}V > 0$.

   (d) Montrer $P(\{X_n = 0\} \cap \{Y_n = 1\}) \leq P(X_n < M_n)$.

(e) En utilisant ce qui précède, montrez que

$$\forall n \geq 1 \quad \frac{n}{2} < u_n.$$

4. On pose

$$G_n = \sum_{k=1}^{n} \max(1\!\!1_{A_k}, 1\!\!1_{B_k}).$$

(a) Montrer que

$$\forall k \geq 1 \max(1\!\!1_{A_k}, 1\!\!1_{B_k}) = 1\!\!1_{C_k}.$$

(b) Expliquez en français courant ce que représente G_n.

(c) Montrer que pout tout entier non nul n , on a $P(C_n) = 3/4$. En déduire la loi de G_n.

(d) Montrer que $M_n \leq G_n$.

(e) En déduire que

$$\forall n \geq 1 \quad u_n \leq \frac{3}{4}n.$$

(f) Trouver un entier n non nul tel que $u_n = \frac{3}{4}n$.

5. *Pour les héros* On admet le résultat (double) suivant:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{n} = \inf_{n \geq 1} \frac{u_n}{n} = \frac{1}{2}.$$

À la lumière de ces résultats et de ceux qui ont été montrés ici, dites si l'ensemble $K = \{\frac{u_n}{n}; n \geq 1\}$ admet une borne inférieure, une borne supérieure, un minimum, un maximum.

FIN DE L'ÉPREUVE