Université d'Orléans

Deug MIAS et SM

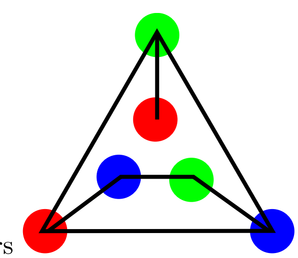
Unité MA 3.03

Probabilités et Graphes

Examen du 26 juin 2001

durée: 2h
Corrigé abrégé

Exercice I

- On trouve $P_G(X) = X(X-1)^2(X-2)(X^2-3X+3)$
- $\chi(G) = \inf\{n \in \mathbb{N}; P_G(n) \neq 0\} = 3.$
- Un exemple de coloriage à 3 couleurs 
- Le nombre de coloriages propres à 5 couleurs vaut $P_G(5) = 3120$.

Exercice II

1. Il suffit de remarquer que $(\mathbb{N}, \dot{+})$ est un groupe dans lequel tout élément (en particulier $a \dot{+} b$!) est son propre symétrique.

2. On décompose les nombres concernés en sommes de puissances de 2 distinctes: $4 = 4; 5 = 1 + 4; 7 = 1 + 2 + 4$.

   On a donc $4 \dot{+} 5 = 1; 5 \dot{+} 7 = 2; 7 \dot{+} 4 = 1 + 2 = 3$.

3. Dans le jeu *Fan Tan*, la fonction de Grundy d'une position est la somme digitale des hauteurs des tas qui la composent. Une position perdante pour l'autre joueur obtenue à partir de la position considérée et laissant intacte les tas de hauteurs 4 et 5 est donc telle que le troisième tas à une hauteur x vérifiant $4 \dot{+} 5 \dot{+} x = 0$, soit $x = 4 \dot{+} 5 = 1$. Idem dans les

deux autres cas. Les trois positions dans lesquelles il est intéressant de mettre l'adversaire sont donc

- $(4, 5, 1)$: on enlève 6 pions au tas de hauteur 7.
- $(5, 7, 2)$: on enlève 2 pions au tas de hauteur 4.
- $(7, 4, 3)$: on enlève 2 pions au tas de hauteur 5.

Problème

1. Comme k est un entier Ent $\frac{1}{U_i} \geq k \iff \frac{1}{U_i} \geq k$. On a donc

$$\begin{aligned} P(\text{Ent } \frac{1}{U_i} \geq k) &= P(\frac{1}{U_i} \geq k) \\ &= P(U_i \leq \frac{1}{k}) \\ &= P(U_i \in [0, \frac{1}{k}]) \\ &= \frac{1}{k}, \end{aligned}$$

car U_i suit la loi uniforme sur $[0, 1]$ et $1/k \in [0, 1]$.

2. On fabrique T_1 est une fonction de U_1 et T_2 est une fonction de U_2. Or U_1 et U_2 sont indépendantes, donc T_1 et T_2 sont indépendantes.

3.
$$\{V \geq k\} = \{\min(T_1, T_2) \geq k\} = \{T_1 \geq k\} \cap \{T_2 \geq k\}$$

Comme T_1 et T_2 sont indépendantes, on a alors

$$P(V \geq k) = P(T_1 \geq k)P(T_2 \geq k) = \frac{1}{k} \times \frac{1}{k} = \frac{1}{k^2}.$$

4. On a
$$\{X \geq k\} = \{X \geq k + 1\} \cup \{X = k\},$$

où la réunion est disjointe. On en déduit

$$P(X \geq k) = P(X \geq k + 1) + P(X = k),$$

d'où
$$P(X = k) = P(X \geq k) - P(X \geq k + 1).$$

5. (a) D'après la question précédente

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} kP(V=k) &= \sum_{k=1}^{n} k(P(X \geq k) - P(X \geq k+1)) \\
&= \sum_{k=1}^{n} kP(X \geq k) - \sum_{k=1}^{n} kP(X \geq k+1) \\
&= \sum_{k=1}^{n} kP(X \geq k) - \sum_{k=0}^{n} kP(X \geq k+1) \\
&= \sum_{k=1}^{n} kP(X \geq k) - \sum_{k=1}^{n+1} (k-1)P(X \geq k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} kP(X \geq k) - \sum_{k=1}^{n} (k-1)P(X \geq k) - nP(X \geq n) \\
&= \sum_{k=1}^{n} P(X \geq k) - nP(X \geq n)
\end{aligned}
$$

(b) En remplaçant les expressions du membre de droite par les résultats trouvés en 3., on a

$$\sum_{k=1}^{n} kP(V=k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \frac{n}{(n+1)^2}$$

On en déduit que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}V &= \sum_{k=1}^{+\infty} kP(V=k) \\
&= \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} kP(V=k) \\
&= \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{(n+1)^2} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - 0 \\
&= \frac{\pi^2}{6}
\end{aligned}
$$

(c)

$$P(V < \mathbb{E}V) = P(V < \frac{\pi^2}{6})) = P(V < 2),$$

car V est à valeurs entières et que 2 est le plus petit entier supérieur à $\frac{\pi^2}{6}$. D'autre part $P(V < 2) = 1 - P(V \geq 2) = 1 - \frac{2^2}{,}$ d'après la

question 3.
On a donc $P(V < \mathbb{E}V) = 3/4$.

(a) En appliquant à T_1 la formule démontrée en 4. et en injectant dans 1., on a

$$P(T_1 = k) = P(T_1 \geq k) - P(T_1 \geq k+1) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}.$$

(b) Par définition

$$P(T_1 = k | V \geq k) = \frac{P(\{T_1 = k\} \cap \{V \geq k\})}{P(V \geq k)}.$$

Or

$$\{T_1 = k\} \cap \{V \geq k\} = \{T_1 = k\} \cap \{T_1 \geq k\} \cap \{T_2 \geq k\} = \{T_1 = k\} \cap \{T_2 \geq k\}$$

Comme T_1 et T_2 sont indépendants, on a $P(\{T_1 = k\} \cap \{T_2 \geq k\}) = P(T_1 = k)P(T_2 \geq k) = \frac{1}{k(k+1)} . \frac{1}{k}$. Comme $P(V \geq k) = \frac{1}{k^2}$, on a finalement $P(T_1 = k | V \geq k) = \frac{1}{k+1}$.