Université d'Orléans

Deug MIAS et SM

Unité MA 3.03

Probabilités et Graphes

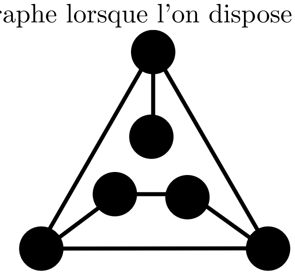
Examen du 26 juin 2001

durée: 2h

Le polycopié de cours, les notes manuscrites, et les calculatrices sont autorisés.

Exercice I

Déterminer le polynôme chromatique du graphe suivant ainsi que son nombre chromatique. Donner un exemple de coloriage propre de ce graphe avec un nombre minimal de couleur et calculer le nombre de coloriages propres de ce graphe lorsque l'on dispose d'une palette de 5 couleurs.



Si l'on colorie les sommets du graphe aléatoirement avec une palette de cinq couleurs, quelle est la probabilité qu'il n'existe aucune arête dont les deux sommets sont de la même couleur ? (Faites les hypothèses raisonnables nécessaires.)

Exercice II

1. Montrer

$$\forall (a,b,x) \in \mathbb{N}^3 \quad a \dot{+} b \dot{+} x = 0 \iff x = a \dot{+} b.$$

2. Calculer $4 \dot{+} 5; 5 \dot{+} 7; 7 \dot{+} 4$.

3. Dans le jeu *Fan Tan*, est-on en situation gagnante lorsque l'on doit jouer alors qu'il y simultanément sur la table: un tas de 4 pions, un tas de 5 pions, un tas de 7 pions ? Trouver les trois coups possibles qui assurent la victoire.

SUITE DE L'ÉPREUVE AU VERSO

Problème

Notation
Pour $x \in \mathbb{R}$, on appelle partie entière de x et on note Ent (x) l'unique entier n vérifiant $n \leq x < n+1$.

Soient U_1, U_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0,1]$. On pose

$$T_1 = \text{Ent }(\frac{1}{U_1}) \text{ et } T_2 = \text{Ent }(\frac{1}{U_2}),$$

ainsi que

$$V = \min(T_1, T_2).$$

1. Montrer
$$\forall i \in \{1,2\} \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad P(T_i \geq k) = \frac{1}{k}.$$
2. Expliquer brièvement pourquoi les variables aléatoires T_1 et T_2 sont indépendantes.
3. Montrer
$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad P(V \geq k) = \frac{1}{k^2}.$$
4. Montrer soigneusement que toute variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifie:
$$\forall k \in \mathbb{N} \quad P(X = k) = P(X \geq k) - P(X \geq k+1).$$
Les deux questions qui suivent sont indépendantes
5. (a) Montrer
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=1}^{n} kP(V = k) = \big(\sum_{k=1}^{n} P(V \geq k)\big) - nP(V \geq n+1).$$
(b) En déduire $\mathbb{E}V = \frac{\pi^2}{6}$. (On rappelle que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, ce que l'on ne demande évidemment pas de démontrer.)
(c) Montrer que $P(V < \mathbb{E}V) = 3/4$.
Pour ceux qui ont oublié leur calculatrice, on donne:
$$1.644 < \frac{\pi^2}{6} < 1.645.$$
6. (a) Montrer
$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad P(T_1 = k) = \frac{1}{k(k+1)}.$$
(b) Montrer
$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad P(T_1 = k | V \geq k) = \frac{1}{k+1}.$$

FIN DE L'ÉPREUVE