Université de Nancy I **Master 2**

Nancy-Université
Université
Henri Poincaré

Modèles stochastiques sur réseau

Examen du 14 février 2011

durée 3h

Les documents papier (livres, polycopiés, notes manuscrites,...) sont autorisés.
Les calculatrices respectant la règlementation (dimensions inférieures à 15 cm par 20 cm, alimentation autonome, pas d'imprimante) sont autorisées.
Tout instrument de communication, qu'il en soit fait ou non usage, est interdit.

Exercice 1

Soit Ω un ensemble non vide, $\mathcal{A}$ une tribu de parties de Ω, $T : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Omega, \mathcal{A})$ une transformation de $(\Omega, \mathcal{A})$. On note $\mathcal{I}_s$ la tribu des événements strictement invariants par T, $\mathcal{K}$ l'ensemble des probabilités sur $(\Omega, \mathcal{A})$ qui sont conservées par T. On suppose que $\mathcal{K}$ est non vide.

1. Démontrer que $\mathcal{K}$, considéré comme un sous-ensemble du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des mesures réelles sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est un convexe, c'est à dire que
$$\forall P, Q \in \mathcal{K} \quad \forall \alpha \in [0,1] \quad \alpha P + (1-\alpha)Q \in \mathcal{K}.$$
2. Soit $P \in \mathcal{K}$ et $A \in \mathcal{A}$. Montrer que la suite $\sum_{k=0}^{n-1} 1\!\!1_A \circ T^n$ converge presque sûrement vers une limite que l'on déterminera.
3. Soient P et Q deux probabilités différentes sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Démontrer que si la transformation T est ergodique à la fois pour P et Q, ces mesures de probabilités sont orthogonales ; c'est à dire qu'il existe un événement A tel que $P(A) = 0$ et $Q(A) = 1$.
4. Soit P une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ appartenant à $\mathcal{K}$. Démontrer que T est ergodique par rapport à P si et seulement si la seule probabilité absolument continue par rapport à P et invariante par T est P.
Indication : sous l'hypothèse que T est ergodique pour P, on pourra montrer qu'une probabilité absolument continue par rapport à P et invariante par T est ergodique.
Dans le cas où T n'est pas ergodique pour P , on pourra considérer $\mathbb{P}(.|A)$ avec A bien choisi.
5. Démontrer que T est ergodique pour une probabilité μ sur $(\Omega, \mathcal{A})$ si et seulement si μ est un point extrémal de $\mathcal{K}$, c'est à dire qu'il ne peut pas s'écrire $\alpha P + (1-\alpha)Q$ avec $\alpha \in]0,1[$, $P, Q \in \mathcal{K}$ et $P \neq Q$.

Exercice 2

La loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n, k)$ modélise le phénomène suivant : on tire au hasard k individus dans une population de N individus, et l'on compte le nombre d'individus possédant une certaine particularité, sachant qu'il y a exactement n personnes dans la population totale qui possédaient cette particularité.

De manière théorique, la loi hypergéométrique est la loi image de la loi uniforme sur $\Omega = \mathcal{B}(N,k)$ par l'application

$$\begin{array}{rcl} X : \mathcal{B}(N,k) & \to & \mathbb{N} \\ \omega & \mapsto & X(\omega) = \text{Card } \{1,\dots,n\}) \cap \omega \end{array}$$

Ainsi pour $i \in \{0,\dots,\min(n,k)\}$, on a

$$\mathcal{H}(N,n,k)(i) = \frac{\binom{n}{i}\binom{N-n}{k-i}}{\binom{N}{k}}$$

Montrer que si $n_1 \le n_2$, $\mathcal{H}(N,n_1,k) \preceq \mathcal{H}(N,n_2,k)$.

Exercice 3

On dispose d'une collection d'objets numérotés de 1 à n, de valeurs respectives $X_1,\dots,X_n$ et de volumes respectifs $V_1,\dots,V_n$.

On veut remplir un sac à dos de contenance maximale n avec certains de ces objets, de manière à maximiser le gain total. Ainsi, le gain maximal est

$$G_n = \max_{\varepsilon \in A_n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i X_i,$$

avec

$$A_n = \{\varepsilon \in \{0,1\}^n : \quad \sum_{i=1}^n \varepsilon_i V_i \le n\}.$$

On suppose que les variables $V_1,\dots,V_n,X_1,\dots,X_n$ sont des variables aléatoires positives indépendantes et qu'il existe une constante K telle que pour tout i $X_i \le K$ presque sûrement.

Montrer que G_n/n converge presque sûrement vers une limite déterministe .

Exercice 4

On considère la percolation Bernoulli $\mathbb{P}_p$ sur $\mathbb{Z}^2$, de paramètre $p > p_c$. On note A_n l'événement : de chacun des points $(0,k)$ pour k entre 1 et n, on peut faire partir un chemin infini. Montrer que $\mathbb{P}_p(A_n)^{1/n}$ admet une limite lorsque n tend vers l'infini, et que cette limite est strictement positive.

FIN