Université de Nancy I **Master 2**

Modèles stochastiques sur réseau

Examen du 24 février 2009

durée 3h

Les documents papier (livres, polycopiés, notes manuscrites,...) sont autorisés.
Les calculatrices respectant la règlementation (dimensions inférieures à 15 cm par 20 cm, alimentation autonome, pas d'imprimante) sont autorisées.
Tout instrument de communication, qu'il en soit fait ou non usage, est interdit.

Soit $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}$. On note $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\Omega)$ et $\mathbb{P}_p = \text{Ber}(p)^{\otimes \mathbb{Z}^2}$, et pour $i \in \mathbb{Z}^2$, on pose $X_i(\omega) = \omega_i$.

Enfin, pour tout $i \in \mathbb{Z}^2$, on pose

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{si} \sum_{j : \|j-i\|_\infty \le 1} X_j \ge 5 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On note enfin $\mathbb{Q}_p$ la loi de $(Y_i)_{i\in\mathbb{Z}^2}$ sous $\mathbb{P}_p$.

1. Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, tel que
$$\forall p \in [0,1] \quad \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} Y_{ke_1} \to P(p) \quad \mathbb{P}_p \text{ p.s..}$$
Préciser la valeur de $P(1)$ et $P(0)$.
2. Soient i et j deux éléments quelconques de $\mathbb{Z}^2$.
Montrer que Covar $(Y_i, Y_j) \ge 0$. Que peut-on dire si $\|i-j\|_\infty \ge 3$?
3. Montrer que le champ $(Y_x)_{x\in\mathbb{Z}^2}$ est M-dépendant, pour un M que l'on déterminera.
4. On note $C_Y(x)(\omega)$ l'ensemble des points y tels qu'il existe un chemin $x_0 = x, x_1, \dots x_n = y$ avec $\|x_k - x_{k+1}\|_1 = 1$ pour tout $k \in \{0,\dots,n-1\}$ et $Y_k(\omega) = 1$ pour tout $k \in \{0,\dots,n\}$.
Grâce à un couplage, montrer que la fonction $p \mapsto \mathbb{P}_p(|C_Y(0)| = +\infty)$ est croissante.
5. On note $I = \{\exists x \in \mathbb{Z}^2; |C_Y(x)| = +\infty\}$. Montrer que pour tout $p \in [0,1]$, $\mathbb{P}_p(I) \in \{0;1\}$.
6. Montrer qu'il existe des fonctions Φ, Ψ de $[0,1]$ dans lui-même, avec
$$\forall p \in [0,1] \quad \mathbb{P}_{\Phi(p)} \preceq \mathbb{Q}_p \preceq \mathbb{P}_{\Psi(p)},$$
$$\lim_{p\to 0} \Phi(p) = 0 \text{ et } \lim_{p\to 1} \Psi(p) = 1.$$
7. Montrer qu'il existe $p_c^* \in]0,1[$, avec $\mathbb{P}_p(I) = 0$ pour $p < p_c^*$ et$\mathbb{P}_p(I) = 1$ pour $p > p_c^*$.
8. Montrer qu'il existe p_0 tel que
$$\forall p \in [0,p_0] \quad \mathbb{P}_p(|C_Y(0)| > n) = O(2^{-n}).$$

FIN