SUJET D'EXAMEN

DIPLOME : Master MFA	Durée du sujet : 3H
UE : Théorie ergodique	Nom des rédacteurs : O. GARET et M. MADRITSCH
Semestre : 9	
Epreuve de :	■ Documents autorisés
Session ......1........	☐ Documents non autorisés
Date : 8 février 2018	■ Calculatrices autorisées
Horaire : 9H30–12H30	☐ Calculatrice non autorisées

****

Rédigez la solution de l'exercice 5 sur une copie séparée des autres questions.

ON SERA TRÈS VIGILANT À LA QUALITÉ DE LA RÉDACTION.

****

Exercice 1. Soit (X, T) un système dynamique topologique. Montrer que si X est minimal, alors tout $x \in X$ est uniformément récurrent.

Exercice 2. Soit X un espace compact et métrique et soit $T\colon X \to X$ continue.
Montrer qu'alors, il existe une mesure T-invariante (*i.e.* $\mathcal{M}(X)^T \neq \varnothing$).

Exercice 3. Utiliser le théorème de van der Waerden pour démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $|\{n^3\sqrt{3}\}| < \varepsilon$.

Puis montrer que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \# \left\{ n \leq N \colon n^3\sqrt{3} \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \right\} = \frac{N}{2}.$$

Exercice 4. Soit X un ensemble fini et soit $T\colon X \to X$ une permutation. Pour quels choix T est-elle ergodique par rapport à la mesure uniforme ? Pour quels choix T est-elle uniquement ergodique ?

Exercice 5. Soit $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. On note θ l'opérateur de translation sur Ω. Soit $E \in \mathcal{B}(\Omega)$ un ensemble laissé stable par θ. On pose pour tout $n \geq 0$, $X_n(\omega) = \omega_n$ et on note $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par $X_0, \ldots, X_n$. On note A_n l'image de E par l'application $\omega \mapsto (\omega_0, \ldots, \omega_{n-1})$

1. Montrer que pour tous n, p entiers naturels, on a $A_{n+p} \subset A_n \times A_p$.
2. En déduire que $\frac{\log |A_n|}{n}$ admet une limite lorsque n tend vers l'infini. Cette limite, notée $h_{top}(E)$, est l'entropie topologique de E.
3. On suppose que $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mathbb{P}, \theta)$ est un système dynamique mesuré avec $\mathbb{P}(E) = 1$. On rappelle que $H(\mathbb{P}, \theta) = \lim \frac{1}{n} H(\mathcal{F}_n)$. Montrer que
$$H(\mathbb{P}, \theta) \leq h_{top}(E).$$
4. On s'intéresse maintenant au cas où
$$E = \{\omega \in \Omega; \quad \forall n \geq 0 \quad \omega_n = 1 \text{ ou } \omega_{n+1} = 1\}.$$
   (a) Montrer que $h_{top}(E) = \log \phi$, avec $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
   (b) Soit $p \in]0,1[$. Déterminer une mesure μ_p sur $\{0,1\}$ telle que
$$A_p = \begin{pmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} \\ a_{1,0} & a_{1,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$
   soit la matrice de passage d'une chaîne de Markov stationnaire. On note maintenant $\mathbb{P}^{\mu_p}$ la mesure markovienne sur Ω correspondant à cette chaîne.
   (c) Montrer que $\mathbb{P}^{\mu_p}(E) = 1$.
   (d) À l'aide du théorème ergodique, montrer que $H(\mathbb{P}^{\mu_p}, \theta) = \mathbb{E}^{\mu^p}(-\log a_{X_0,X_1})$.
   (e) Déterminer p tel que $H(\mathbb{P}^{\mu_p}, \theta) = h_{top}(E)$.

FIN

1 Solutions

Solution 5 1. Soit $(\omega_0, \dots, \omega_{n+p-1}) \in A_{n+p}$. Par définition de A_{n+p}, $(\omega_0, \dots, \omega_{n+p-1})$ se prolonge en un élément $\Omega \in E$. Clairement, $(\omega_0, \dots, \omega_{n-1})$ est l'image de ω par la projection sur les n premières coordonnées, donc $(\omega_0, \dots, \omega_{n-1}) \in A_n$. De son côté $(\omega_n, \dots, \omega_{n+p-1})$ est l'image de $\theta^n\omega$ par la projection sur les p premières coordonnées. Comme E est stable par θ, $\theta^n\omega \in E$, et $(\omega_n, \dots, \omega_{n+p-1})$ est donc bien dans A_p. Finalement $(\omega_0, \dots, \omega_{n+p-1}) \in A_n \times A_p$, d'où l'inclusion $A_{n+p} \subset A_n \times A_p$.

2. On en déduit que $|A_{n+p}| \leq |A_n \times A_p| = |A_n|.|A_p|$. En prenant le logarithme, on obtient que la suite $(\log |A_n|)_{n\geq 1}$ est sous-additive. D'après le lemme de Fekete, $\frac{\log |A_n|}{n}$ admet donc une limite lorsque n tend vers l'infini.

3. Posant $h(x) = -x \log x$ (prolongé par continuité en 0), on a

$$\begin{aligned}
&H(\mathcal{F}_{n-1}) \\
&= \sum_{(x_0,\dots,x_{n-1})} -\mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}) \log(\mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1})) \\
&= \sum_{(x_0,\dots,x_{n-1})\in\{0,1\}^n} h(\mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1})) \\
&= \sum_{(x_0,\dots,x_{n-1})\in A_n} h(\mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1})),
\end{aligned}$$

la contribution des termes hors A_n étant nulle. Comme h est concave, il vient

$$\begin{aligned}
\frac{H(\mathcal{F}_{n-1})}{|A_n|} &\leq h\left(\frac{\sum_{(x_0,\dots,x_{n-1})\in A_n} \mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1})}{|A_n|} \right) \\
&= h\left(\frac{1}{|A_n|} \right) = -\frac{1}{|A_n|} \log \frac{1}{|A_n|} = \frac{1}{|A_n|} \log |A_n|
\end{aligned}$$

En multipliant par $|A_n|/(n-1)$ et en faisant tendre n vers l'infini, on obtient

$$H(\mathbb{P}, \theta) \leq h_{top}(E).$$

4. (a) Pour $i = 0, 1$, notons A_n^i l'ensemble des éléments de A_n qui se terminent par i. A_n^0 est en bijection avec A_{n-1}^1 tandis que A_n^1 est

en bijection avec A_{n-1}. On a donc successivement

$$\begin{aligned} |A_n| &= |A_n^0| + |A_n^1| \\ &= |A_{n-1}^1| + |A_{n-1}| \\ &= |A_{n-2}| + |A_{n-1}| \end{aligned}$$

La suite $u_n = |A_n|$ vérifie donc une récurrence linéaire d'ordre deux $u_n = u_{n-2} + u_{n-1}$, avec $u_1 = 2$ et $u_2 = 3$. (u_n) est une suite d'entiers strictement croissante, donc elle tend vers l'infini.
À un décalage près, c'est la suite de Fibonacci. u_n s'écrit sous la forme $u_n = A\phi^n + B\overline{\phi}^n$, où ϕ et $\overline{\phi}$ sont les deux racines de l'équation caractéristique $x^2 = x + 1$, ϕ étant la plus grande. Comme u_n tend vers l'infini, $A > 0$ et on a

$$\log |A_n| = n \log \phi + \log(A + B(\phi/\overline{\phi})^n) \sim n \log \phi,$$

ce qui donne $h_{top}(E) = \log \phi$, avec $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(b) On cherche un vecteur colonne $\nu = (1-x, x)$ qui soit solution de l'équation $\nu A_p = \nu$. Un tel vecteur existe d'après la théorie générale des chaînes de Markov à espace d'état finis. L'équation sur la première coordonnée $0.(1-x)+(1-p)x = 1-x$ nous donne $x = \frac{1}{2-p}$, qui est bien entre 0 et 1.

(c) Le complémentaire de E s'écrit $\cup_{n\geq 0}\{X_n = 0, X_{n+1} = 0\}$. Pour montrer que $\mathbb{P}^{\mu_p}(E) = 1$, il suffit donc de montrer que pour tout n, $\mathbb{P}^{\mu_p}(X_n = 0, X_{n+1} = 0) = 0$ et de conclure par réunion dénombrable. Or la propriété de Markov dit que

$$\mathbb{P}^{\mu_p}(X_n = 0, X_{n+1} = 0) = \mathbb{P}^{\mu_p}(X_n = 0)a_{0,0},$$

qui est nul car $a_{0,0} = 0$.

(d) En conjuguant le théorème de Shannon–Mc Millan–Breiman et celui de Kolmogorov–Sinaï, on voit que l'entropie du système est la limite presque sûre de $\frac{1}{n} I_{\mathcal{F}_n}$, soit

$$-\frac{1}{n} \log \mathbb{P}^{\mu^p}(X_0 = X_0(\omega), \ldots X_n = X_n(\omega))$$

qui se réécrit ici

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n}\left(-\log \mathbb{P}^{\mu^p}(X_0 = X_0(\omega)) - \sum_{i=0}^{n-1} \log a_{X_i(\omega)X_{i+1}(\omega)})\right) \\ &= -\frac{\log \mathbb{P}^{\mu^p}(X_0 = X_0(\omega))}{n} - \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \log a_{X_0,X_1} \circ \theta^i \end{aligned}$$

La chaîne étant irréductible, le système est ergodique ; d'après le théorème ergodique de Birkhoff, la limite est donc $\mathbb{E}^{\mu^p}(-\log a_{X_0,X_1})$.

(e) On a $\mathbb{P}^{\mu_p}$ presque sûrement

$$-\log a_{X_0,X_1} = 1\!\!1_{\{X_0=1\}} \left(-\log(1-p) 1\!\!1_{\{X_1=0\}}) - \log(p) 1\!\!1_{\{X_1=1\}}\right),$$

d'où en prenant l'espérance et en utilisant la propriété de Markov

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\mu^p}(-\log a_{X_0,X_1}) &= x(-(1-p)\log(1-p) - p\log p) \\ &= \frac{-(1-p)\log(1-p) - p\log p}{2-p}\end{aligned}$$

De l'équation $\phi^2 = 1 + \phi$, vient $1 = \phi^{-2} + \phi^{-1}$, ce qui fait que $p = 1/\phi$ (qui est entre 0 et 1) vérifie $p^2 + p = 1$, soit $1 - p = p^2$. Il vient alors

$$\begin{aligned}\frac{-(1-p)\log(1-p) - p\log p}{2-p} &= \frac{-(1-p)\log(p^2) - p\log p}{2-p} \\ &= \frac{-(1-p)2\log(p) - p\log p}{2-p} \\ &= -\log p = \log\phi,\end{aligned}$$

ce qui donne $H(\mathbb{P}^{\mu_p}, \theta) = \log\phi = h_{top}(E)$.

Ainsi, $\mathbb{P}^{\mu_p}$ est une mesure d'entropie maximale parmi les mesures de probabilité invariantes par le décalage et à support dans E.