Intégration et Probabilités

Olivier Garet

Université de Lorraine – IECL

Rappels d'intégration

Rappel : intégrale de Cauchy (ou intégrale de Riemann)

Pour les fonctions continues (ou continues par morceaux) sur un intervalle compact.

Rappel : intégrale de Cauchy (ou intégrale de Riemann)

Pour les fonctions continues (ou continues par morceaux) sur un intervalle compact.

À tout intervalle compact $[a, b]$, à toute fonction continue par morceaux sur $[a, b]$, on peut associer un nombre que l'on note $\int_a^b f(x)dx$, de telle manière que l'application $(a, b, f) \mapsto \int_a^b f(x)dx$ vérifie :

Rappel : intégrale de Cauchy (ou intégrale de Riemann)

Pour les fonctions continues (ou continues par morceaux) sur un intervalle compact.

À tout intervalle compact $[a, b]$, à toute fonction continue par morceaux sur $[a, b]$, on peut associer un nombre que l'on note $\int_a^b f(x)dx$, de telle manière que l'application $(a, b, f) \mapsto \int_a^b f(x)dx$ vérifie :

- $f \mapsto \int_a^b f(x)dx$ est linéaire ;

Rappel : intégrale de Cauchy (ou intégrale de Riemann)

Pour les fonctions continues (ou continues par morceaux) sur un intervalle compact.
À tout intervalle compact $[a, b]$, à toute fonction continue par morceaux sur $[a, b]$, on peut associer un nombre que l'on note $\int_a^b f(x)dx$, de telle manière que l'application $(a, b, f) \mapsto \int_a^b f(x)dx$ vérifie :

- $f \mapsto \int_a^b f(x)dx$ est linéaire ;
- $f \geq 0$ sur $[a, b]$ entraîne $\int_a^b f(x)dx \geq 0$;

Rappel : intégrale de Cauchy (ou intégrale de Riemann)

Pour les fonctions continues (ou continues par morceaux) sur un intervalle compact.

À tout intervalle compact $[a, b]$, à toute fonction continue par morceaux sur $[a, b]$, on peut associer un nombre que l'on note $\int_a^b f(x)dx$, de telle manière que l'application $(a, b, f) \mapsto \int_a^b f(x)dx$ vérifie :

- $f \mapsto \int_a^b f(x)dx$ est linéaire ;
- $f \geq 0$ sur $[a, b]$ entraîne $\int_a^b f(x)dx \geq 0$;
- $\int_a^b 1\ dx = b - a$;

Rappel : intégrale de Cauchy (ou intégrale de Riemann)

Pour les fonctions continues (ou continues par morceaux) sur un intervalle compact.

À tout intervalle compact $[a, b]$, à toute fonction continue par morceaux sur $[a, b]$, on peut associer un nombre que l'on note $\int_a^b f(x)dx$, de telle manière que l'application $(a, b, f) \mapsto \int_a^b f(x)dx$ vérifie :

- $f \mapsto \int_a^b f(x)dx$ est linéaire ;
- $f \geq 0$ sur $[a, b]$ entraîne $\int_a^b f(x)dx \geq 0$;
- $\int_a^b 1 \ dx = b - a$;
- $\int_a^c f(x) \ dx = \int_a^b f(x) \ dx + \int_b^c f(x) \ dx$.

Rappel : intégrale de Cauchy (ou intégrale de Riemann)

Pour les fonctions continues (ou continues par morceaux) sur un intervalle compact.

À tout intervalle compact $[a, b]$, à toute fonction continue par morceaux sur $[a, b]$, on peut associer un nombre que l'on note $\int_a^b f(x)dx$, de telle manière que l'application $(a, b, f) \mapsto \int_a^b f(x)dx$ vérifie :

- $f \mapsto \int_a^b f(x)dx$ est linéaire ;
- $f \geq 0$ sur $[a, b]$ entraîne $\int_a^b f(x)dx \geq 0$;
- $\int_a^b 1 \; dx = b - a$;
- $\int_a^c f(x) \; dx = \int_a^b f(x) \; dx + \int_b^c f(x) \; dx$.

On en déduit encore

Rappel : intégrale de Cauchy (ou intégrale de Riemann)

Pour les fonctions continues (ou continues par morceaux) sur un intervalle compact.

À tout intervalle compact $[a, b]$, à toute fonction continue par morceaux sur $[a, b]$, on peut associer un nombre que l'on note $\int_a^b f(x)dx$, de telle manière que l'application $(a, b, f) \mapsto \int_a^b f(x)dx$ vérifie :

- $f \mapsto \int_a^b f(x)dx$ est linéaire ;
- $f \geq 0$ sur $[a, b]$ entraîne $\int_a^b f(x)dx \geq 0$;
- $\int_a^b 1\ dx = b - a$;
- $\int_a^c f(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_b^c f(x)\ dx$.

On en déduit encore $|\int_a^b f(x)\ dx| \leq (b-a)\|f\|_\infty$ et

Rappel : intégrale de Cauchy (ou intégrale de Riemann)

Pour les fonctions continues (ou continues par morceaux) sur un intervalle compact.

À tout intervalle compact $[a,b]$, à toute fonction continue par morceaux sur $[a,b]$, on peut associer un nombre que l'on note $\int_a^b f(x)dx$, de telle manière que l'application $(a,b,f) \mapsto \int_a^b f(x)dx$ vérifie :

- $f \mapsto \int_a^b f(x)dx$ est linéaire ;
- $f \geq 0$ sur $[a,b]$ entraîne $\int_a^b f(x)dx \geq 0$;
- $\int_a^b 1\ dx = b - a$;
- $\int_a^c f(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_b^c f(x)\ dx$.

On en déduit encore $|\int_a^b f(x)\ dx| \leq (b-a)\|f\|_\infty$ et

$$|\int_a^b f(x)\ dx - \int_a^b g(x)\ dx| \leq |b-a|.\|f-g\|_\infty$$

Rappel : intégrale de Cauchy (ou intégrale de Riemann)

Pour les fonctions continues (ou continues par morceaux) sur un intervalle compact.
À tout intervalle compact $[a, b]$, à toute fonction continue par morceaux sur $[a, b]$, on peut associer un nombre que l'on note $\int_a^b f(x)dx$, de telle manière que l'application $(a, b, f) \mapsto \int_a^b f(x)dx$ vérifie :

- $f \mapsto \int_a^b f(x)dx$ est linéaire ;
- $f \geq 0$ sur $[a, b]$ entraîne $\int_a^b f(x)dx \geq 0$;
- $\int_a^b 1 \ dx = b - a$;
- $\int_a^c f(x) \ dx = \int_a^b f(x) \ dx + \int_b^c f(x) \ dx$.

On en déduit encore $|\int_a^b f(x) \ dx| \leq (b-a)\|f\|_\infty$ et

$$|\int_a^b f(x) \ dx - \int_a^b g(x) \ dx| \leq |b-a|.\|f-g\|_\infty$$

avec $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|; x \in [a, b]\}$.

Malheureusement, l'intégrale de Riemann n'est pas équipée pour traiter de l'intégrale des fonctions continues sur un intervalle ouvert, bornée ou non.

Intégrales impropres

Malheureusement, l'intégrale de Riemann n'est pas équipée pour traiter de l'intégrale des fonctions continues sur un intervalle ouvert, bornée ou non.
On fabrique alors une rustine, appelée “intégrale impropre” :

Malheureusement, l'intégrale de Riemann n'est pas équipée pour traiter de l'intégrale des fonctions continues sur un intervalle ouvert, bornée ou non.
On fabrique alors une rustine, appelée "intégrale impropre" :

- si f est une fonction continue sur $[a, b[$ (avec éventuellement $b = +\infty$) telle que la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\ dt$ admette une limite L quand x tend vers b,

Intégrales impropres

Malheureusement, l'intégrale de Riemann n'est pas équipée pour traiter de l'intégrale des fonctions continues sur un intervalle ouvert, bornée ou non.
On fabrique alors une rustine, appelée "intégrale impropre" :

- si f est une fonction continue sur $[a, b[$ (avec éventuellement $b = +\infty$) telle que la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\, dt$ admette une limite L quand x tend vers b,
- on dit alors que L est l'intégrale de f entre a et b et on note

$$\int_a^b f(t)\, dt = L.$$

Existence

Il est fréquent que l'on ne sache pas déterminer la limite.

Existence

Il est fréquent que l'on ne sache pas déterminer la limite.En revanche, l'existence de la limite peut être obtenue par

- un argument de monotonie :

Existence

Il est fréquent que l'on ne sache pas déterminer la limite.En revanche, l'existence de la limite peut être obtenue par

- un argument de monotonie : si f est positive et $\int_a^y f(x)\,dx \leq M < +\infty$ pour tout $y \in [a, b[$, alors $\int_a^b f(x)\,dx$ existe,

Existence

Il est fréquent que l'on ne sache pas déterminer la limite.En revanche, l'existence de la limite peut être obtenue par

- un argument de monotonie : si f est positive et $\int_a^y f(x)\,dx \le M < +\infty$ pour tout $y \in [a,b[$, alors $\int_a^b f(x)\,dx$ existe,
- le critère de Cauchy :

Existence

Il est fréquent que l'on ne sache pas déterminer la limite.En revanche, l'existence de la limite peut être obtenue par

- un argument de monotonie : si f est positive et $\int_a^y f(x)\,dx \leq M < +\infty$ pour tout $y \in [a, b[$, alors $\int_a^b f(x)\,dx$ existe,
- le critère de Cauchy : si $\lim_{y \to b} \sup_{y \leq s \leq t < b} |\int_s^t f(x)\,dx| = 0$, alors $\int_a^b f(x)\,dx$ existe.

Un critère de convergence

Proposition

Soient f et g des fonctions continues définies sur $[a, b[$ (avec $b \in [a, +\infty]$).

Un critère de convergence

Proposition

Soient f et g des fonctions continues définies sur $[a, b[$ (avec $b \in [a, +\infty]$).
On suppose de plus que g est positive, que l'intégrale $\int_a^b g(t)\,dt$ est convergente et qu'au voisinage de b, on a $f = O(g)$.

Un critère de convergence

Proposition

Soient f et g des fonctions continues définies sur $[a, b[$ (avec $b \in [a, +\infty]$).
On suppose de plus que g est positive, que l'intégrale $\int_a^b g(t)\ dt$ est convergente et qu'au voisinage de b, on a $f = O(g)$.
Alors, l'intégrale $\int_a^b f(t)\ dt$ est convergente et lorsque x tend vers b, on a $\int_x^b f(t)\ dt = O\left(\int_x^b g(t)\ dt\right)$.

Preuve

Comme $f = O(g)$, il existe des constantes a_1 et A telles que $|f(x)| \le Ag(x)$ pour $x \in [a_1, b[$.

Preuve

Comme $f = O(g)$, il existe des constantes a_1 et A telles que $|f(x)| \leq Ag(x)$ pour $x \in [a_1, b[$.

Soit $\varepsilon > 0$.

Preuve

Comme $f = O(g)$, il existe des constantes a_1 et A telles que $|f(x)| \leq Ag(x)$ pour $x \in [a_1, b[$.
Soit $\varepsilon > 0$.Comme $\int_a^b g(t)\ dt$ est convergente, on peut trouver $a' \in]a_1, b[$ tel que $\sup_{a' \leq s \leq t < b} |\int_s^t g(x)\ dx| \leq \frac{\varepsilon}{A}$.

Preuve

Comme $f = O(g)$, il existe des constantes a_1 et A telles que $|f(x)| \leq Ag(x)$ pour $x \in [a_1, b[$.

Soit $\varepsilon > 0$.Comme $\int_a^b g(t)\ dt$ est convergente, on peut trouver $a' \in]a_1, b[$ tel que $\sup_{a' \leq s \leq t < b} |\int_s^t g(x)\ dx| \leq \frac{\varepsilon}{A}$.

On en déduit que $\sup_{a' \leq s \leq t < b} |\int_s^t f(x)\ dx| \leq \varepsilon$,

Preuve

Comme $f = O(g)$, il existe des constantes a_1 et A telles que $|f(x)| \leq Ag(x)$ pour $x \in [a_1, b[$.
Soit $\varepsilon > 0$.Comme $\int_a^b g(t)\ dt$ est convergente, on peut trouver $a' \in]a_1, b[$ tel que $\sup\limits_{a' \leq s \leq t < b} |\int_s^t g(x)\ dx| \leq \frac{\varepsilon}{A}$.

On en déduit que $\sup\limits_{a' \leq s \leq t < b} |\int_s^t f(x)\ dx| \leq \varepsilon$,ce qui donne la convergence de l'intégrale, d'après le critère de Cauchy.

Preuve

Comme $f = O(g)$, il existe des constantes a_1 et A telles que $|f(x)| \leq Ag(x)$ pour $x \in [a_1, b[$.
Soit $\varepsilon > 0$.Comme $\int_a^b g(t)\ dt$ est convergente, on peut trouver $a' \in]a_1, b[$ tel que $\sup_{a' \leq s \leq t < b} |\int_s^t g(x)\ dx| \leq \frac{\varepsilon}{A}$.

On en déduit que $\sup_{a' \leq s \leq t < b} |\int_s^t f(x)\ dx| \leq \varepsilon$,ce qui donne la convergence de l'intégrale, d'après le critère de Cauchy.
Pour x, t avec $b > t \geq x \geq a'$, on a

$$\left| \int_x^t f(u)\ du \right| \leq \int_x^t Ag(u)\ du = A \int_x^t g(u)\ du,$$

Preuve

Comme $f = O(g)$, il existe des constantes a_1 et A telles que $|f(x)| \le Ag(x)$ pour $x \in [a_1, b[$.
Soit $\varepsilon > 0$.Comme $\int_a^b g(t)\ dt$ est convergente, on peut trouver $a' \in]a_1, b[$ tel que $\sup\limits_{a' \le s \le t < b} |\int_s^t g(x)\ dx| \le \frac{\varepsilon}{A}$.

On en déduit que $\sup\limits_{a' \le s \le t < b} |\int_s^t f(x)\ dx| \le \varepsilon$,ce qui donne la convergence de l'intégrale, d'après le critère de Cauchy.
Pour x, t avec $b > t \ge x \ge a'$, on a

$$\left|\int_x^t f(u)\ du\right| \le \int_x^t Ag(u)\ du = A\int_x^t g(u)\ du,$$

Soit $x \in [a', b[$.

Preuve

Comme $f = O(g)$, il existe des constantes a_1 et A telles que $|f(x)| \leq Ag(x)$ pour $x \in [a_1, b[$.
Soit $\varepsilon > 0$.Comme $\int_a^b g(t)\ dt$ est convergente, on peut trouver $a' \in]a_1, b[$ tel que $\sup_{a' \leq s \leq t < b} |\int_s^t g(x)\ dx| \leq \frac{\varepsilon}{A}$.

On en déduit que $\sup_{a' \leq s \leq t < b} |\int_s^t f(x)\ dx| \leq \varepsilon$,ce qui donne la convergence de l'intégrale, d'après le critère de Cauchy.
Pour x, t avec $b > t \geq x \geq a'$, on a

$$\left|\int_x^t f(u)\ du\right| \leq \int_x^t Ag(u)\ du = A\int_x^t g(u)\ du,$$

Soit $x \in [a', b[$.En faisant tendre t vers b, on obtient

Preuve

Comme $f = O(g)$, il existe des constantes a_1 et A telles que $|f(x)| \leq Ag(x)$ pour $x \in [a_1, b[$.
Soit $\varepsilon > 0$.Comme $\int_a^b g(t)\ dt$ est convergente, on peut trouver $a' \in]a_1, b[$ tel que $\sup\limits_{a' \leq s \leq t < b} |\int_s^t g(x)\ dx| \leq \frac{\varepsilon}{A}$.

On en déduit que $\sup\limits_{a' \leq s \leq t < b} |\int_s^t f(x)\ dx| \leq \varepsilon$,ce qui donne la convergence de l'intégrale, d'après le critère de Cauchy.
Pour x, t avec $b > t \geq x \geq a'$, on a

$$\left|\int_x^t f(u)\ du\right| \leq \int_x^t Ag(u)\ du = A \int_x^t g(u)\ du,$$

Soit $x \in [a', b[$.En faisant tendre t vers b, on obtient

$$\left|\int_x^b f(u)\ du\right| \leq A \int_x^b g(u)\ du,$$

Preuve

Comme $f = O(g)$, il existe des constantes a_1 et A telles que $|f(x)| \le Ag(x)$ pour $x \in [a_1, b[$.

Soit $\varepsilon > 0$.Comme $\int_a^b g(t)\ dt$ est convergente, on peut trouver $a' \in]a_1, b[$ tel que $\sup\limits_{a' \le s \le t < b} |\int_s^t g(x)\ dx| \le \frac{\varepsilon}{A}$.

On en déduit que $\sup\limits_{a' \le s \le t < b} |\int_s^t f(x)\ dx| \le \varepsilon$,ce qui donne la convergence de l'intégrale, d'après le critère de Cauchy.

Pour x, t avec $b > t \ge x \ge a'$, on a

$$\left| \int_x^t f(u)\ du \right| \le \int_x^t Ag(u)\ du = A \int_x^t g(u)\ du,$$

Soit $x \in [a', b[$.En faisant tendre t vers b, on obtient

$$\left| \int_x^b f(u)\ du \right| \le A \int_x^b g(u)\ du,$$

ce qui est l'inégalité voulue.

Proposition

Si $f = o(g)$ *avec* $g \geq 0$ *sur* $[a, b[$ *et* $\int_a^b g(t)\ dt = +\infty$, *alors quand* $x \to b$

$$\int_a^x f(t)\ dt = o\left(\int_a^x g(t)\ dt\right)$$

Dans le même genre

Proposition

Si $f = o(g)$ *avec* $g \geq 0$ *sur* $[a, b[$ *et* $\int_a^b g(t)\ dt = +\infty$, *alors quand* $x \to b$

$$\int_a^x f(t)\ dt = o\left(\int_a^x g(t)\ dt\right)$$

Exemple

Pour $a > 0$, *on a* $\frac{1}{t} = o(t^{a-1})$ *lorsque* $t \to +\infty$,

Dans le même genre

Proposition

Si $f = o(g)$ *avec* $g \geq 0$ *sur* $[a, b[$ *et* $\int_a^b g(t)\ dt = +\infty$, *alors quand* $x \to b$

$$\int_a^x f(t)\ dt = o\left(\int_a^x g(t)\ dt\right)$$

Exemple

Pour $a > 0$, *on a* $\frac{1}{t} = o(t^{a-1})$ *lorsque* $t \to +\infty$,*donc*

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t}\ dt = o\left(\int_1^x t^{a-1}\right) = o(\frac{1}{a}(x^a - 1)\ dt)$$

Dans le même genre

Proposition

Si $f = o(g)$ *avec* $g \geq 0$ *sur* $[a, b[$ *et* $\int_a^b g(t)\ dt = +\infty$, *alors quand* $x \to b$

$$\int_a^x f(t)\ dt = o\left(\int_a^x g(t)\ dt\right)$$

Exemple

Pour $a > 0$, *on a* $\frac{1}{t} = o(t^{a-1})$ *lorsque* $t \to +\infty$,*donc*

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t}\ dt = o\left(\int_1^x t^{a-1}\right) = o(\frac{1}{a}(x^a - 1)\ dt)$$

Or $\frac{1}{a}(x^a - 1) = O(x^a)$, *donc* $\log x = o(x^a)$.

Références

Pour que ce théorème soit opérant, il faut avoir des références :

- $\int_0^{+\infty} e^{-at}\,dt$ converge pour $a > 0$.

Références

Pour que ce théorème soit opérant, il faut avoir des références :

- $\int_0^{+\infty} e^{-at}\, dt$ converge pour $a > 0$.
  Et on a même $\int_0^{+\infty} e^{-at}\, dt = \frac{1}{a}$.
  (à savoir par coeur et à savoir retrouver)

Références

Pour que ce théorème soit opérant, il faut avoir des références :

- $\int_0^{+\infty} e^{-at}\ dt$ converge pour $a > 0$.
  Et on a même $\int_0^{+\infty} e^{-at}\ dt = \frac{1}{a}$.
  (à savoir par coeur et à savoir retrouver)
- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^s}\ dt$ converge pour $s > 1$.

Références

Pour que ce théorème soit opérant, il faut avoir des références :

- $\int_0^{+\infty} e^{-at}\ dt$ converge pour $a > 0$.
  Et on a même $\int_0^{+\infty} e^{-at}\ dt = \frac{1}{a}$.
  (à savoir par coeur et à savoir retrouver)
- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^s}\ dt$ converge pour $s > 1$.
  Et on a même $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^s}\ dt = \frac{1}{s-1}$. (à savoir retrouver)

Références

Pour que ce théorème soit opérant, il faut avoir des références :

- $\int_0^{+\infty} e^{-at}\ dt$ converge pour $a > 0$.
  Et on a même $\int_0^{+\infty} e^{-at}\ dt = \frac{1}{a}$.
  (à savoir par coeur et à savoir retrouver)
- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^s}\ dt$ converge pour $s > 1$.
  Et on a même $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^s}\ dt = \frac{1}{s-1}$. (à savoir retrouver)
- $\int_0^{1} \frac{1}{t^s}\ dt$ converge pour $s < 1$.

Références

Pour que ce théorème soit opérant, il faut avoir des références :

- $\int_0^{+\infty} e^{-at}\ dt$ converge pour $a > 0$.
  Et on a même $\int_0^{+\infty} e^{-at}\ dt = \frac{1}{a}$.
  (à savoir par coeur et à savoir retrouver)
- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^s}\ dt$ converge pour $s > 1$.
  Et on a même $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^s}\ dt = \frac{1}{s-1}$. (à savoir retrouver)
- $\int_0^{1} \frac{1}{t^s}\ dt$ converge pour $s < 1$.
  Et on a même $\int_0^{1} \frac{1}{t^s}\ dt = \frac{1}{1-s}$. (à savoir retrouver)

Références

Pour que ce théorème soit opérant, il faut avoir des références :

- $\int_0^{+\infty} e^{-at}\ dt$ converge pour $a > 0$.
  Et on a même $\int_0^{+\infty} e^{-at}\ dt = \frac{1}{a}$.
  (à savoir par coeur et à savoir retrouver)
- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^s}\ dt$ converge pour $s > 1$.
  Et on a même $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^s}\ dt = \frac{1}{s-1}$. (à savoir retrouver)
- $\int_0^{1} \frac{1}{t^s}\ dt$ converge pour $s < 1$.
  Et on a même $\int_0^{1} \frac{1}{t^s}\ dt = \frac{1}{1-s}$. (à savoir retrouver)
- $\int_0^1 (-\log t)\ dt$ converge.

Références

Pour que ce théorème soit opérant, il faut avoir des références :

- $\int_0^{+\infty} e^{-at}\,dt$ converge pour $a > 0$.
  Et on a même $\int_0^{+\infty} e^{-at}\,dt = \frac{1}{a}$.
  (à savoir par coeur et à savoir retrouver)
- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^s}\,dt$ converge pour $s > 1$.
  Et on a même $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^s}\,dt = \frac{1}{s-1}$. (à savoir retrouver)
- $\int_0^{1} \frac{1}{t^s}\,dt$ converge pour $s < 1$.
  Et on a même $\int_0^{1} \frac{1}{t^s}\,dt = \frac{1}{1-s}$. (à savoir retrouver)
- $\int_0^1 (-\log t)\,dt$ converge.
  Et on a même $\int_0^1 (-\log t)\,dt = 1$. (à savoir retrouver)

Quand $t \to +\infty$, quels que soient $a, b, c, d, C > 0$, on a

Comment montrer les O (ou : techniques de majoration)

Quand $t \to +\infty$, quels que soient $a, b, c, d, C > 0$, on a

$$e^{at^2} \gg e^{bt} \gg t^c \gg (\log t)^d \gg C.$$

Quand $t \to +\infty$, quels que soient $a, b, c, d, C > 0$, on a

$$e^{at^2} \gg e^{bt} \gg t^c \gg (\log t)^d \gg C.$$

Ces résultats doivent être connus.

Comment montrer les O (ou : techniques de majoration)

Quand $t \to +\infty$, quels que soient $a, b, c, d, C > 0$, on a

$$e^{at^2} \gg e^{bt} \gg t^c \gg (\log t)^d \gg C.$$

Ces résultats doivent être connus.
Indications de preuve :

Quand $t \to +\infty$, quels que soient $a, b, c, d, C > 0$, on a

$$e^{at^2} \gg e^{bt} \gg t^c \gg (\log t)^d \gg C.$$

Ces résultats doivent être connus.
Indications de preuve :

- $\gg$ Pour $t \geq \frac{2b}{a}$, $e^{at^2} \geq e^{2bt}$

Comment montrer les O (ou : techniques de majoration)

Quand $t \to +\infty$, quels que soient $a, b, c, d, C > 0$, on a

$$e^{at^2} \gg e^{bt} \gg t^c \gg (\log t)^d \gg C.$$

Ces résultats doivent être connus.
Indications de preuve :

- $\gg$ Pour $t \geq \frac{2b}{a}$, $e^{at^2} \geq e^{2bt}$
- $\gg$ $e^{bt} \geq \frac{(bt)^n}{n!} \gg t^c$

Comment montrer les O (ou : techniques de majoration)

Quand $t \to +\infty$, quels que soient $a, b, c, d, C > 0$, on a

$$e^{at^2} \gg e^{bt} \gg t^c \gg (\log t)^d \gg C.$$

Ces résultats doivent être connus.
Indications de preuve :

- $\gg$ Pour $t \geq \frac{2b}{a}$, $e^{at^2} \geq e^{2bt}$
- $\gg$ $e^{bt} \geq \frac{(bt)^n}{n!} \gg t^c$ si on a choisi n avec $n > c$.

Comment montrer les O (ou : techniques de majoration)

Quand $t \to +\infty$, quels que soient $a, b, c, d, C > 0$, on a

$$e^{at^2} \gg e^{bt} \gg t^c \gg (\log t)^d \gg C.$$

Ces résultats doivent être connus.
Indications de preuve :

- $\gg$ Pour $t \geq \frac{2b}{a}$, $e^{at^2} \geq e^{2bt}$
- $\gg$ $e^{bt} \geq \frac{(bt)^n}{n!} \gg t^c$ si on a choisi n avec $n > c$.
- $\gg$ conséquence simple de l'exemple

Comment montrer les O (ou : techniques de majoration)

Quand $t \to +\infty$, quels que soient $a, b, c, d, C > 0$, on a

$$e^{at^2} \gg e^{bt} \gg t^c \gg (\log t)^d \gg C.$$

Ces résultats doivent être connus.
Indications de preuve :

- $\gg$ Pour $t \geq \frac{2b}{a}$, $e^{at^2} \geq e^{2bt}$
- $\gg$ $e^{bt} \geq \frac{(bt)^n}{n!} \gg t^c$ si on a choisi n avec $n > c$.
- $\gg$ conséquence simple de l'exemple
- $\gg$ C'est le résultat bien connu $\lim_{x \to +\infty} \log(x) = +\infty$ qui est une conséquence de $\int_{2^{n-1}}^{2^n} \frac{dt}{t} = \int_{2^n}^{2^{n+1}} \frac{dt}{t}$

Comment montrer les O (ou : techniques de majoration)

Quand $t \to +\infty$, quels que soient $a, b, c, d, C > 0$, on a

$$e^{at^2} \gg e^{bt} \gg t^c \gg (\log t)^d \gg C.$$

Ces résultats doivent être connus.
Indications de preuve :

- $\gg$ Pour $t \geq \frac{2b}{a}$, $e^{at^2} \geq e^{2bt}$
- $\gg$ $e^{bt} \geq \frac{(bt)^n}{n!} \gg t^c$ si on a choisi n avec $n > c$.
- $\gg$ conséquence simple de l'exemple
- $\gg$ C'est le résultat bien connu $\lim\limits_{x \to +\infty} \log(x) = +\infty$ qui est une conséquence de $\int_{2^{n-1}}^{2^n} \frac{dt}{t} = \int_{2^n}^{2^{n+1}} \frac{dt}{t}$

Important : toutes les constantes positives conviennent, d'où la technique suivante

Ne pas mettre tous les oeufs dans le même panier

Pour $\alpha > 1$, montrer la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\log t}{t^\alpha}\ dt$.

Pour $\alpha > 1$, montrer la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\log t}{t^\alpha}\, dt$.

- D'après les croissances comparées, ce sont les t^α qui dominent

Pour $\alpha > 1$, montrer la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\log t}{t^\alpha}\, dt$.

- D'après les croissances comparées, ce sont les t^α qui dominent
- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\, dt < +\infty$.

Ne pas mettre tous les oeufs dans le même panier

Pour $\alpha > 1$, montrer la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\log t}{t^\alpha}\, dt$.

- D'après les croissances comparées, ce sont les t^α qui dominent
- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\, dt < +\infty$.
- On a de la marge : pour $\beta \in]1, +\alpha[$ on a encore $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\beta}\, dt < +\infty$.

Ne pas mettre tous les oeufs dans le même panier

Pour $\alpha > 1$, montrer la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\log t}{t^\alpha}\ dt$.

- D'après les croissances comparées, ce sont les t^α qui dominent
- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\ dt < +\infty$.
- On a de la marge : pour $\beta \in]1, +\alpha[$ on a encore $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\beta}\ dt < +\infty$.
- On choisit $\beta \in]1, +\alpha[$ et on écrit $\frac{\log t}{t^\alpha} = \frac{1}{t^\beta} \frac{\log t}{t^{\alpha-\beta}}$

Ne pas mettre tous les oeufs dans le même panier

Pour $\alpha > 1$, montrer la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\log t}{t^\alpha}\ dt$.

- D'après les croissances comparées, ce sont les t^α qui dominent
- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\ dt < +\infty$.
- On a de la marge : pour $\beta \in]1, +\alpha[$ on a encore $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\beta}\ dt < +\infty$.
- On choisit $\beta \in]1, +\alpha[$ et on écrit $\frac{\log t}{t^\alpha} = \frac{1}{t^\beta} \frac{\log t}{t^{\alpha-\beta}}$
- Comme $\alpha - \beta > 0$, $t^{\alpha-\beta} \gg \log t$

Ne pas mettre tous les oeufs dans le même panier

Pour $\alpha > 1$, montrer la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\log t}{t^\alpha}\, dt$.

- D'après les croissances comparées, ce sont les t^α qui dominent
- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\, dt < +\infty$.
- On a de la marge : pour $\beta \in]1, +\alpha[$ on a encore $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\beta}\, dt < +\infty$.
- On choisit $\beta \in]1, +\alpha[$ et on écrit $\frac{\log t}{t^\alpha} = \frac{1}{t^\beta} \frac{\log t}{t^{\alpha-\beta}}$
- Comme $\alpha - \beta > 0$, $t^{\alpha-\beta} \gg \log t$
- D'où $\frac{\log t}{t^\alpha} = o(\frac{1}{t^\beta})$ et on peut conclure.

Bien connaître ses développements limités

Exemple

Nature de $\int_0^1 \frac{x-\sin(x)}{x^\alpha}\,dx$.

Exemple

Nature de $\int_0^1 \frac{x-\sin(x)}{x^\alpha}\,dx$.

On a en 0 *:* $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$,

Bien connaître ses développements limités

Exemple

Nature de $\int_0^1 \frac{x-\sin(x)}{x^\alpha}\, dx$.

On a en 0 : $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$,*donc*

$x - \sin(x) = \frac{x^3}{6} + o(x^3)$,

Exemple

Nature de $\int_0^1 \frac{x-\sin(x)}{x^\alpha}\, dx$.
On a en 0 : $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$,*donc*
$x - \sin(x) = \frac{x^3}{6} + o(x^3)$,*soit* $x - \sin(x) \sim \frac{x^3}{6}$.

Bien connaître ses développements limités

Exemple

Nature de $\int_0^1 \frac{x-\sin(x)}{x^\alpha}\, dx$.

On a en 0 : $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$,*donc*
$x - \sin(x) = \frac{x^3}{6} + o(x^3)$,*soit* $x - \sin(x) \sim \frac{x^3}{6}$.

On en déduit que $\frac{x-\sin(x)}{x^\alpha} \sim \frac{1}{6}\frac{1}{x^{\alpha-3}}$.

Exemple

Nature de $\int_0^1 \frac{x-\sin(x)}{x^\alpha}\,dx$.
On a en 0 : $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$,*donc*
$x - \sin(x) = \frac{x^3}{6} + o(x^3)$,*soit* $x - \sin(x) \sim \frac{x^3}{6}$.
On en déduit que $\frac{x-\sin(x)}{x^\alpha} \sim \frac{1}{6}\frac{1}{x^{\alpha-3}}$.
La fonction $x - \sin(x)$ *est continue sur* $]0,1]$,

Bien connaître ses développements limités

Exemple

Nature de $\int_0^1 \frac{x-\sin(x)}{x^\alpha}\,dx$.
On a en 0 : $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$,*donc*
$x - \sin(x) = \frac{x^3}{6} + o(x^3)$,*soit* $x - \sin(x) \sim \frac{x^3}{6}$.
On en déduit que $\frac{x-\sin(x)}{x^\alpha} \sim \frac{1}{6}\frac{1}{x^{\alpha-3}}$.
La fonction $x - \sin(x)$ *est continue sur* $]0,1]$, *équivalente en* 0 *à la fonction positive* $\frac{1}{6}\frac{1}{x^{\alpha-3}}$.

Exemple

Nature de $\int_0^1 \frac{x-\sin(x)}{x^\alpha}\ dx$.
On a en 0 *:* $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$,*donc*
$x - \sin(x) = \frac{x^3}{6} + o(x^3)$,*soit* $x - \sin(x) \sim \frac{x^3}{6}$.
On en déduit que $\frac{x-\sin(x)}{x^\alpha} \sim \frac{1}{6}\frac{1}{x^{\alpha-3}}$.
La fonction $x - \sin(x)$ *est continue sur* $]0,1]$, *équivalente en* 0 *à la fonction positive* $\frac{1}{6}\frac{1}{x^{\alpha-3}}$.
L'intégrale est donc de même nature que $\int_0^1 \frac{1}{6}\frac{1}{x^{\alpha-3}}\ dx$.

Exemple

Nature de $\int_0^1 \frac{x-\sin(x)}{x^\alpha}\,dx$.
On a en 0 : $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$,*donc*
$x - \sin(x) = \frac{x^3}{6} + o(x^3)$,*soit* $x - \sin(x) \sim \frac{x^3}{6}$.
On en déduit que $\frac{x-\sin(x)}{x^\alpha} \sim \frac{1}{6}\frac{1}{x^{\alpha-3}}$.
La fonction $x - \sin(x)$ *est continue sur* $]0,1]$, *équivalente en* 0 *à la fonction positive* $\frac{1}{6}\frac{1}{x^{\alpha-3}}$.
L'intégrale est donc de même nature que $\int_0^1 \frac{1}{6}\frac{1}{x^{\alpha-3}}\,dx$.
Elle converge ssi $\alpha - 3 < 1$, *soit* $\alpha < 4$.