Intégration et probabilités

Olivier Garet

Université de Lorraine – IECL

Cours 1: une introduction

Objectifs du cours d'Intégration et Probabilités

- Construire une théorie de l'intégration qui permette de
  - Intégrer de larges classes de fonctions
  - Intégrer sur $\mathbb{R}^d$ aussi simplement que sur $\mathbb{R}$
  - Rapprocher les théories des séries et des intégrales
  - Faciliter l'étude d'intégrales à paramètre (transformées de Fourier, de Laplace)
  - Donner un cadre rigoureux et pratique à la théorie des probabilités sur un espace non dénombrable
- Pour cela, progresser dans les techniques de majoration

Une construction d'intégrale à la Cauchy 1/2

Soit f de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, continue et affine par morceaux (capm): on a $a=a_0,\dots,a_n=b$ et on suppose f affine sur $[a_i,a_{i+1}]$ pour tout $i\in\{0,\dots,n-1\}$. On pose alors

$$\int_a^b f(x)\ dx=\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)\frac{f(a_i)+f(a_{i+1})}{2}.$$

La définition est correcte car la somme ne dépend pas de la subdivision. Vu ces deux remarques,on montre facilement que

- $f\mapsto\int_a^b f(x)\ dx$ est linéaire de capm(a,b) dans $\mathbb{R}$.
- $\forall f\in \text{capm}(a,b)\quad |\int_a^b f(x)\ dx\le(b-a)\|f\|_{\infty,a,b}$
- $\forall f\in \text{capm}(a,b), m\in[a,b]$
  $\int_a^b f(x)\ dx=\int_a^m f(x)\ dx+\int_m^b f(x)\ dx$

Une construction d'intégrale à la Cauchy 2/2

Avec le théorème de Heine, on peut montrer que toute fonction continue sur $[a, b]$ est limite uniforme de fonction continues affines par morceaux sur $[a, b]$.
Les deux premières équations montrent que $f \mapsto \int_a^b f(x)$ est une forme linéaire continue.
De manière classique (voir cours de Topologie), cette forme linéaire continue se prolonge de manière unique à l'ensemble des fonctions continues sur $[a, b]$, et on a encore

- $f \mapsto \int_a^b f(x)\ dx$ est linéaire de $C([a, b])$ dans $\mathbb{R}$.
- $\forall f \in C([a, b]) \quad |\int_a^b f(x)\ dx| \leq (b-a)\|f\|_{\infty,a,b}$
- $\forall f \in C([a, b]), m \in [a, b]$
  $\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^m f(x)\ dx + \int_m^b f(x)\ dx$

Deux exercices

Démontrer le théorème fondamental de l'analyse:

Théorème

Pour $f \in C([a,b])$ la fonction F définie sur $[a,b]$ par $F(t) = \int_a^t f(x)\,dx$ est une primitive de f.

et le théorème des sommes de Riemann:

Théorème

Pour $f \in C([a,b])$ et (a^n) une suite de subdivisions $a = a_0^n \le x_0^n \le a_1^n \le \dots a_{N_n-1}^n \le x_{N_n-1}^n \le a_{N_n}^n = b$, alors, si

$$\Delta_n = \max_{0 \le k < N_n} (a_{k+1}^n - a_k^n) \to 0,$$

alors

$$\sum_{k=0}^{N_n-1} (a_{k+1}^n - a_k^n) f(x_k) \to \int_a^b f(x)\,dx.$$

Parenthèse: module de continuité

Pour montrer les deux propriétés précédentes, ceci est très utile:

Lemme

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. On définit la fonction module de continuité

$$\begin{aligned}]0,+\infty[&\to [0,+\infty[\\ \varepsilon &\mapsto \omega_f(\varepsilon) \end{aligned}$$

par

$$\omega_f(\varepsilon) = \sup_{x,y\in[a,b],|x-y|\le\varepsilon} |f(x)-f(y)|.$$

On a $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \omega_f(\varepsilon) = 0$.

Ainsi, la théorie de l'intégration Cauchy-Riemann est très liée à la régularité des fonctions intégrées.

Extension du domaine de la lutte

En deuxième année, des questions importantes sont de donner un sens à

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \text{ et } \int_0^{+\infty} f(t)\,dt.$$

- On note $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$, la limite, si elle existe, de $\sum_{k=1}^{n} a_k$ (quand $n \to +\infty$).
- On note $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$, la limite, si elle existe, de $\int_0^{T} f(t)\,dt$ (quand $T \to +\infty$).

Mais ces extensions ne sont pas canoniques.

Théorème

Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}(\{1,\dots,n\})$*, on a*

$$\sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)} = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Ainsi, pour $n = 3$, on a

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= a_1 + a_3 + a_2 = a_1 \\ &= a_2 + a_1 + a_3 = a_2 + a_3 + a_1 \\ &= a_3 + a_1 + a_2 = a_3 + a_2 + a_1 \end{aligned}$$

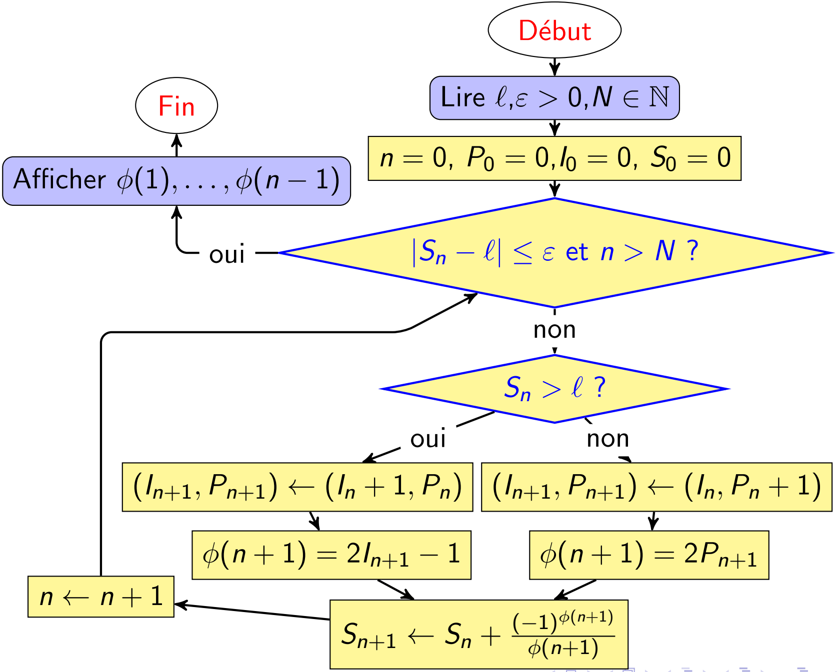
Ces sommes méritent d'être écrites sans référence ordinale: on peut les écrire $\sum_{k\in\{1,\dots,n\}} a_k$.

Théorème

Si $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^+ = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k^- = +\infty$ *et que* $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, *alors pour tout* $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, *il existe une bijection* ϕ *de* $\mathbb{N}^*$ *dans lui même telle que*

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{N} a_{\phi(k)} = \ell.$$

Exercice: montrer que ces hypothèses sont vérifiées si la série est semi-convergente.
On va donner une preuve dans le cas où $\ell \in \mathbb{R}$ et $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$.
(Question: que vaut $\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n}$?)


Début
Lire $\ell, \varepsilon > 0, N \in \mathbb{N}$
$n = 0,\ P_0 = 0, I_0 = 0,\ S_0 = 0$
$|S_n - \ell| \leq \varepsilon$ et $n > N$?
oui
Afficher $\phi(1), \dots, \phi(n-1)$
Fin
non
$S_n > \ell$?
oui
non
$(I_{n+1}, P_{n+1}) \leftarrow (I_n + 1, P_n)$
$(I_{n+1}, P_{n+1}) \leftarrow (I_n, P_n + 1)$
$\phi(n+1) = 2I_{n+1} - 1$
$\phi(n+1) = 2P_{n+1}$
$S_{n+1} \leftarrow S_n + \frac{(-1)^{\phi(n+1)}}{\phi(n+1)}$
$n \leftarrow n + 1$

En revanche, on peut démontrer

Théorème

Si $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k| < +\infty$ *et que* $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, *alors pour toute bijection* ϕ *de* $\mathbb{N}^*$ *dans lui même, on a*

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{N} a_{\phi(k)} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{N} a_k,$$

ce qui justifie ici l'écriture $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k$.
On est ici dans le cadre de la théorie des familles sommables.

Ce théorème (pas si facile) sera prouvée de manière naturelle dans le cadre de l'intégration abstraite, qui réunit

- Les familles sommables (ou absolument convergentes $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k| < +\infty$)
- Les fonctions intégrables (ou d'intégrale absolument convergente $\int_0^{+\infty} |f(t)\ dt < +\infty$)

Les deux quantités s'écriront alors sous la forme

$$\int_{\Omega} f(x)\ d\mu(x),$$

où μ est une mesure, et on montrera en particulier que

Théorème

Si $(A_k)_{k\geq 1}$ est une partition de Ω, alors

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{N} \int_{A_k} f(x)\ d\mu(x) = \int_{\Omega} f(x)\ d\mu(x).$$

Cette “relation de Chasles généralisée” n’est pas toujours vérifiée par les “intégrales impropres”: si $f(t) = \frac{\sin t}{t}$, pour tout $\ell \in \mathbb{R}$, il existe une permutation ϕ de $\mathbb{N}$ telle que pour la partition (A_k) définie par $A_k = [\pi\phi(k), \pi(\phi(k)+1)[$, on a

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{k=1}^{N} \int_{A_k} f(x)\, dx = \ell.$$