

Intégration et probabilités

Olivier Garet

Université de Lorraine – IECL

Cours 1: une introduction

Objectifs du cours d'Intégration et Probabilités

- Construire une théorie de l'intégration qui permette de
 - Intégrer de larges classes de fonctions
 - Intégrer sur $\mathbb{R}^d$ aussi simplement que sur $\mathbb{R}$
 - Rapprocher les théories des séries et des intégrales
 - Faciliter l'étude d'intégrales à paramètre (transformées de Fourier, de Laplace)
 - Donner un cadre rigoureux et pratique à la théorie des probabilités sur un espace non dénombrable
- Pour cela, progresser dans les techniques de majoration

Une construction d'intégrale à la Cauchy 1/2

Soit f de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, continue et affine par morceaux (capm): on a $a = a_0, \dots, a_n = b$ et on suppose f affine sur $[a_i, a_{i+1}]$ pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$. On pose alors

$$\int_a^b f(x) \, dx = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \frac{f(a_i) + f(a_{i+1})}{2}.$$

La définition est correcte car la somme ne dépend pas de la subdivision. Vu ces deux remarques, on montre facilement que

- $f \mapsto \int_a^b f(x) \, dx$ est linéaire de $\text{capm}(a, b)$ dans $\mathbb{R}$.
- $\forall f \in \text{capm}(a, b) \quad \left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq (b - a) \|f\|_{\infty, a, b}$
- $\forall f \in \text{capm}(a, b), m \in [a, b]$
 $\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^m f(x) \, dx + \int_m^b f(x) \, dx$

Une construction d'intégrale à la Cauchy 2/2

Avec le théorème de Heine, on peut montrer que toute fonction continue sur $[a, b]$ est limite uniforme de fonction continues affines par morceaux sur $[a, b]$.

Les deux premières équations montrent que $f \mapsto \int_a^b f(x)$ est une forme linéaire continue.

De manière classique (voir cours de Topologie), cette forme linéaire continue se prolonge de manière unique à l'ensemble des fonctions continues sur $[a, b]$, et on a encore

- $f \mapsto \int_a^b f(x) dx$ est linéaire de $C([a, b])$ dans $\mathbb{R}$.
- $\forall f \in C([a, b]) \quad \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq (b - a) \|f\|_{\infty, a, b}$
- $\forall f \in C([a, b]), m \in [a, b]$
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^m f(x) dx + \int_m^b f(x) dx$$

Deux exercices

Démontrer le théorème fondamental de l'analyse:

Théorème

Pour $f \in C([a, b])$ la fonction F définie sur $[a, b]$ par $F(t) = \int_a^t f(x) dx$ est une primitive de f .

et le théorème des sommes de Riemann:

Théorème

Pour $f \in C([a, b])$ et (a^n) une suite de subdivisions $a = a_0^n \leq x_0^n \leq a_1^n \leq \dots a_{N_n-1}^n \leq x_{N_n-1}^n \leq a_{N_n}^n = b$, alors, si

$$\Delta_n = \max_{0 \leq k < N_n} (a_{k+1}^n - a_k^n) \rightarrow 0,$$

alors

$$\sum_{k=0}^{N_n-1} (a_{k+1}^n - a_k^n) f(x_k) \rightarrow \int_a^b f(x) dx.$$

Parenthèse: module de continuité

Pour montrer les deux propriétés précédentes, ceci est très utile:

Lemme

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. On définit la fonction module de continuité

$$\begin{aligned}]0, +\infty[&\rightarrow [0, +\infty[\\ \varepsilon &\mapsto \omega_f(\varepsilon) \end{aligned}$$

par

$$\omega_f(\varepsilon) = \sup_{x, y \in [a, b], |x - y| \leq \varepsilon} |f(x) - f(y)|.$$

On a $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \omega_f(\varepsilon) = 0$.

Ainsi, la théorie de l'intégration Cauchy-Riemann est très liée à la régularité des fonctions intégrées.

En deuxième année, des questions importantes sont de donner un sens à

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \text{ et } \int_0^{+\infty} f(t) dt.$$

- On note $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$, la limite, si elle existe, de $\sum_{k=1}^n a_k$ (quand $n \rightarrow +\infty$).
- On note $\int_0^{+\infty} f(t) dt$, la limite, si elle existe, de $\int_0^T f(t) dt$ (quand $T \rightarrow +\infty$).

Mais ces extensions ne sont pas canoniques.

Théorème

Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}(\{1, \dots, n\})$, on a

$$\sum_{k=1}^n a_{\sigma(k)} = \sum_{k=1}^n a_k$$

Ainsi, pour $n = 3$, on a

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= a_1 + a_3 + a_2 = a_1 \\ &= a_2 + a_1 + a_3 = a_2 + a_3 + a_1 \\ &= a_3 + a_1 + a_2 = a_3 + a_2 + a_1 \end{aligned}$$

Ces sommes méritent d'être écrites sans référence ordinale: on peut les écrire $\sum_{k \in \{1, \dots, n\}} a_k$.

Théorème

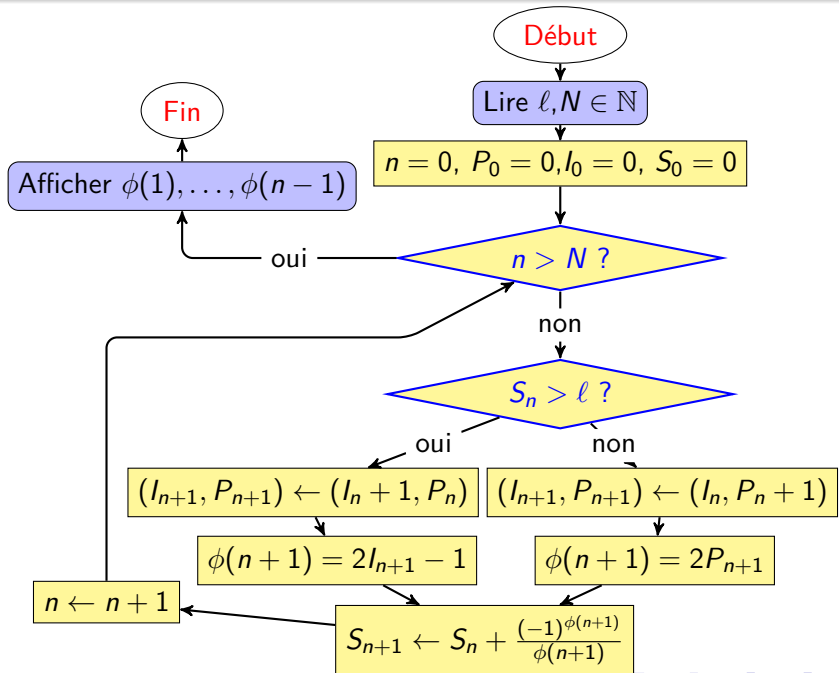
Si $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^+ = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k^- = +\infty$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$, alors pour tout $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, il existe une bijection ϕ de $\mathbb{N}^$ dans lui-même telle que*

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N a_{\phi(k)} = \ell.$$

Exercice: montrer que ces hypothèses sont vérifiées si la série est semi-convergente.

On va donner une preuve dans le cas où $\ell \in \mathbb{R}$ et $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

(Question: que vaut $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^n}{n}$?)



En revanche, on peut démontrer

Théorème

Si $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k| < +\infty$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$, alors pour toute bijection ϕ de $\mathbb{N}^$ dans lui même, on a*

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N a_{\phi(k)} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N a_k,$$

ce qui justifie ici l'écriture $\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k$.

On est ici dans le cadre de la théorie des familles sommables.

Ce théorème (pas si facile) sera prouvée de manière naturelle dans le cadre de l'intégration abstraite, qui réunit

- Les familles sommables (ou absolument convergentes $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k| < +\infty$)
- Les fonctions intégrables (ou d'intégrale absolument convergente $\int_0^{+\infty} |f(t)| dt < +\infty$)

Les deux quantités s'écriront alors sous la forme

$$\int_{\Omega} f(x) d\mu(x),$$

où μ est une mesure, et on montrera en particulier que

Théorème

Si $(A_k)_{k \geq 1}$ est une partition de Ω , alors

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N \int_{A_k} f(x) d\mu(x) = \int_{\Omega} f(x) d\mu(x).$$

Cette “relation de Chasles généralisée” n’est pas toujours vérifiée par les “intégrales impropres”: si $f(t) = \frac{\sin t}{t}$, pour tout $\ell \in \mathbb{R}$, il existe une permutation ϕ de $\mathbb{N}$ telle que pour la partition (A_k) définie par $A_k = [\pi\phi(k), \pi(\phi(k) + 1)[$, on a

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N \int_{A_k} f(x) \, dx = \ell.$$