Intégration et Probabilités

Olivier Garet

Université de Lorraine – IECL

Limites supérieures

Limite supérieure d'ensembles

Soit $(A_k)_{k\geq 1}$ une famille d'ensembles. Pour tout ω, on peut poser

$$\mathcal{A}(\omega) = \{k \geq 1; \omega \in A_k\}; \quad N(\omega) = |\mathcal{A}(\omega)| = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{A_k}(\omega).$$

Limite supérieure d'ensembles

Soit $(A_k)_{k\geq 1}$ une famille d'ensembles. Pour tout ω, on peut poser

$$\mathcal{A}(\omega) = \{k \geq 1; \omega \in A_k\}; \quad N(\omega) = |\mathcal{A}(\omega)| = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{A_k}(\omega).$$

$\mathcal{A}(\omega)$ est l'ensemble des indices des ensembles qui contiennent ω

Limite supérieure d'ensembles

Soit $(A_k)_{k\geq 1}$ une famille d'ensembles. Pour tout ω, on peut poser

$$\mathcal{A}(\omega) = \{k \geq 1; \omega \in A_k\}; \quad N(\omega) = |\mathcal{A}(\omega)| = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{A_k}(\omega).$$

$\mathcal{A}(\omega)$ est l'ensemble des indices des ensembles qui contiennent ω
$N(\omega)$ est le nombre de k tels que A_k contient ω.

Limite supérieure d'ensembles

Soit $(A_k)_{k\geq 1}$ une famille d'ensembles. Pour tout ω, on peut poser

$$\mathcal{A}(\omega) = \{k \geq 1; \omega \in A_k\}; \quad N(\omega) = |\mathcal{A}(\omega)| = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{A_k}(\omega).$$

$\mathcal{A}(\omega)$ est l'ensemble des indices des ensembles qui contiennent ω
$N(\omega)$ est le nombre de k tels que A_k contient ω.
On appelle limite supérieure des ensembles A_k l'ensemble des ω tels que $\mathcal{A}(\omega)$ est infini

Limite supérieure d'ensembles

Soit $(A_k)_{k\geq 1}$ une famille d'ensembles. Pour tout ω, on peut poser

$$\mathcal{A}(\omega) = \{k \geq 1; \omega \in A_k\}; \quad N(\omega) = |\mathcal{A}(\omega)| = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{A_k}(\omega).$$

$\mathcal{A}(\omega)$ est l'ensemble des indices des ensembles qui contiennent ω
$N(\omega)$ est le nombre de k tels que A_k contient ω.
On appelle limite supérieure des ensembles A_k l'ensemble des ω tels que $\mathcal{A}(\omega)$ est infini ($N(\omega) = +\infty$).

Limite supérieure d'ensembles

Soit $(A_k)_{k\geq 1}$ une famille d'ensembles. Pour tout ω, on peut poser

$$\mathcal{A}(\omega)=\{k\geq 1; \omega\in A_k\};\quad N(\omega)=|\mathcal{A}(\omega)|=\sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{1}_{A_k}(\omega).$$

$\mathcal{A}(\omega)$ est l'ensemble des indices des ensembles qui contiennent ω
$N(\omega)$ est le nombre de k tels que A_k contient ω.
On appelle limite supérieure des ensembles A_k l'ensemble des ω tels que $\mathcal{A}(\omega)$ est infini ($N(\omega)=+\infty$). Cet ensemble se note $\overline{\lim}_{n\geq 1}A_n$.

Théorème

$$\overline{\lim}_{n\geq 1}A_n=\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n}A_k.$$

Preuve

Démonstration.

- Supposons $\omega \in \overline{\lim}_{n\ge 1} A_n$.

Preuve

Démonstration.

- Supposons $\omega \in \overline{\lim}_{n\geq 1} A_n$. $\mathcal{A}(\omega)$ est infini.

Preuve

Démonstration.

• Supposons $\omega \in \overline{\lim}_{n\geq 1} A_n$. $\mathcal{A}(\omega)$ est infini.
Soit $n \geq 1$. Comme $\mathcal{A}(\omega)$ est infini, il existe $k_0 \geq n$ avec $k_0 \in \mathcal{A}(\omega)$.

Preuve

Démonstration.

• Supposons $\omega \in \overline{\lim}_{n\geq 1} A_n$. $\mathcal{A}(\omega)$ est infini.
Soit $n \geq 1$. Comme $\mathcal{A}(\omega)$ est infini, il existe $k_0 \geq n$ avec $k_0 \in \mathcal{A}(\omega)$.

On a $\omega \in A_{k_0}$, donc $\omega \in \cup_{k\geq n} A_k$.

Preuve

Démonstration.

• Supposons $\omega \in \overline{\lim}_{n\geq 1} A_n$. $\mathcal{A}(\omega)$ est infini.
Soit $n \geq 1$. Comme $\mathcal{A}(\omega)$ est infini, il existe $k_0 \geq n$ avec $k_0 \in \mathcal{A}(\omega)$.

On a $\omega \in A_{k_0}$, donc $\omega \in \cup_{k\geq n} A_k$.Finalement $\omega \in \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k$.

Démonstration.

• Supposons $\omega \in \overline{\lim}_{n\geq 1} A_n$. $\mathcal{A}(\omega)$ est infini.
Soit $n \geq 1$. Comme $\mathcal{A}(\omega)$ est infini, il existe $k_0 \geq n$ avec $k_0 \in \mathcal{A}(\omega)$.

On a $\omega \in A_{k_0}$, donc $\omega \in \cup_{k\geq n} A_k$.Finalement $\omega \in \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k$.

• Supposons $\omega \notin \overline{\lim}_{n\geq 1} A_n$.

Preuve

Démonstration.

• Supposons $\omega \in \overline{\lim}_{n\geq 1} A_n$. $\mathcal{A}(\omega)$ est infini.
Soit $n \geq 1$. Comme $\mathcal{A}(\omega)$ est infini, il existe $k_0 \geq n$ avec $k_0 \in \mathcal{A}(\omega)$.

On a $\omega \in A_{k_0}$, donc $\omega \in \cup_{k\geq n} A_k$.Finalement $\omega \in \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k$.

• Supposons $\omega \notin \overline{\lim}_{n\geq 1} A_n$. $\mathcal{A}(\omega)$ est fini.

Preuve

Démonstration.

• Supposons $\omega \in \overline{\lim}_{n\geq 1} A_n$. $\mathcal{A}(\omega)$ est infini.
Soit $n \geq 1$. Comme $\mathcal{A}(\omega)$ est infini, il existe $k_0 \geq n$ avec $k_0 \in \mathcal{A}(\omega)$.

On a $\omega \in A_{k_0}$, donc $\omega \in \cup_{k\geq n} A_k$.Finalement $\omega \in \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k$.

• Supposons $\omega \notin \overline{\lim}_{n\geq 1} A_n$. $\mathcal{A}(\omega)$ est fini.Posons $n_0 = 1 + \max \mathcal{A}(\omega)$. Pour $k \geq n_0$, $\omega \notin A_k$.

Preuve

Démonstration.

• Supposons $\omega \in \overline{\lim}_{n\geq 1} A_n$. $\mathcal{A}(\omega)$ est infini.
Soit $n \geq 1$. Comme $\mathcal{A}(\omega)$ est infini, il existe $k_0 \geq n$ avec $k_0 \in \mathcal{A}(\omega)$.

On a $\omega \in A_{k_0}$, donc $\omega \in \cup_{k\geq n} A_k$.Finalement $\omega \in \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k$.

• Supposons $\omega \notin \overline{\lim}_{n\geq 1} A_n$. $\mathcal{A}(\omega)$ est fini.Posons $n_0 = 1 + \max \mathcal{A}(\omega)$. Pour $k \geq n_0$, $\omega \notin A_k$.

On en déduit $\omega \notin \cup_{k\geq n_0} A_k$

Preuve

Démonstration.

• Supposons $\omega \in \overline{\lim}_{n\geq 1} A_n$. $\mathcal{A}(\omega)$ est infini.
Soit $n \geq 1$. Comme $\mathcal{A}(\omega)$ est infini, il existe $k_0 \geq n$ avec $k_0 \in \mathcal{A}(\omega)$.

On a $\omega \in A_{k_0}$, donc $\omega \in \cup_{k\geq n} A_k$.Finalement $\omega \in \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k$.

• Supposons $\omega \notin \overline{\lim}_{n\geq 1} A_n$. $\mathcal{A}(\omega)$ est fini.Posons $n_0 = 1 + \max \mathcal{A}(\omega)$. Pour $k \geq n_0$, $\omega \notin A_k$.

On en déduit $\omega \notin \cup_{k\geq n_0} A_k$, puis $\omega \notin \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k$. □

Limite supérieure de suites

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$.

Limite supérieure de suites

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$.
On pose $v_n = \sup\{u_k; k \geq n\}$. (v_n) est décroissante

Limite supérieure de suites

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$.
On pose $v_n = \sup\{u_k; k \geq n\}$. (v_n) est décroissante, donc converge dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$.
On pose $v_n = \sup\{u_k; k \geq n\}$. (v_n) est décroissante, donc converge dans $\overline{\mathbb{R}}$.On note $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\ u_n$ la limite de la suite.

Théorème

On note $L = \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\ u_n$

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$.
On pose $v_n = \sup\{u_k; k \geq n\}$. (v_n) est décroissante, donc converge dans $\overline{\mathbb{R}}$.On note $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} u_n$ la limite de la suite.

Théorème

On note $L = \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} u_n$ *et* $E = \overline{\lim\limits_{n\geq 1}} [-\infty, u_n]$.

Limite supérieure de suites

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$.
On pose $v_n = \sup\{u_k; k \geq n\}$. (v_n) est décroissante, donc converge dans $\overline{\mathbb{R}}$.On note $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \; u_n$ la limite de la suite.

Théorème

On note $L = \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \; u_n$ *et* $E = \overline{\lim\limits_{n\geq 1}} \; [-\infty, u_n]$.
Les éléments de E sont les nombres qui sont dépassés par une infinité de termes de la suite (u_n).

Limite supérieure de suites

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$.
On pose $v_n = \sup\{u_k ; k \geq n\}$. (v_n) est décroissante, donc converge dans $\overline{\mathbb{R}}$.On note $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\; u_n$ la limite de la suite.

Théorème

On note $L = \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\; u_n$ *et* $E = \overline{\lim\limits_{n\geq 1}}\; [-\infty, u_n]$.
Les éléments de E sont les nombres qui sont dépassés par une infinité de termes de la suite (u_n).Alors,

- $x \in E \Longrightarrow L \geq x$;
- $x \notin E \Longrightarrow L \leq x$;
- $L = \sup E$.

Preuve

Démonstration.

- Supposons $x \in E$. Soit $n \geq 1$. Comme $x \in E$, il existe $k \geq n$ avec $u_k \geq x$

Preuve

Démonstration.

- Supposons $x \in E$. Soit $n \geq 1$. Comme $x \in E$, il existe $k \geq n$ avec $u_k \geq x$, donc $v_n \geq x$.

Preuve

Démonstration.

- Supposons $x \in E$. Soit $n \geq 1$. Comme $x \in E$, il existe $k \geq n$ avec $u_k \geq x$, donc $v_n \geq x$. Finalement, à la limite $L \geq x$.

Démonstration.

- Supposons $x \in E$. Soit $n \geq 1$. Comme $x \in E$, il existe $k \geq n$ avec $u_k \geq x$, donc $v_n \geq x$. Finalement, à la limite $L \geq x$.
- Supposons $x \notin E$.

Preuve

Démonstration.

- Supposons $x \in E$. Soit $n \geq 1$. Comme $x \in E$, il existe $k \geq n$ avec $u_k \geq x$, donc $v_n \geq x$. Finalement, à la limite $L \geq x$.
- Supposons $x \notin E$.Il existe $n_0 \geq 1$ tel que $x \notin]-\infty, u_k]$ (c'est à dire $x > u_k$) pour $k \geq n_0$.

Preuve

Démonstration.

- Supposons $x \in E$. Soit $n \geq 1$. Comme $x \in E$, il existe $k \geq n$ avec $u_k \geq x$, donc $v_n \geq x$. Finalement, à la limite $L \geq x$.
- Supposons $x \notin E$.Il existe $n_0 \geq 1$ tel que $x \notin]-\infty, u_k]$ (c'est à dire $x > u_k$) pour $k \geq n_0$. Maintenant, si $n \geq n_0$, en passant à la borne supérieure pour les $k \geq n$, on obtient $v_n \leq x$.

Preuve

Démonstration.

- Supposons $x \in E$. Soit $n \geq 1$. Comme $x \in E$, il existe $k \geq n$ avec $u_k \geq x$, donc $v_n \geq x$. Finalement, à la limite $L \geq x$.
- Supposons $x \notin E$.Il existe $n_0 \geq 1$ tel que $x \notin]-\infty, u_k]$ (c'est à dire $x > u_k$) pour $k \geq n_0$. Maintenant, si $n \geq n_0$, en passant à la borne supérieure pour les $k \geq n$, on obtient $v_n \leq x$.
  À la limite, $L \leq x$.
- Conséquence des deux premiers.

$\square$

Limite supérieure et valeur d'adhérence 1/3

Rappel d'analyse :

Théorème

ℓ est une valeur d'adhérence de la suite (u_n) si et seulement si pour tout voisinage V de ℓ, la suite (u_n) rencontre une infinité de fois V.

Si x est un réel, un voisinage de x est un ensemble qui contient $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ pour un certain $\varepsilon > 0$. Un voisinage de $+\infty$ est un ensemble qui contient $[M, +\infty]$, pour un certain M réel.

Démonstration.

Le sens direct est évident : si $u_{\phi(n)} \to \ell$, pour V voisinage de ℓ, $u_{\phi(n)} \in V$ pour n assez grand ce qui donne une infinité de k tels que $u_k \in V$.

Rappel d'analyse :

Théorème

ℓ est une valeur d'adhérence de la suite (u_n) si et seulement si pour tout voisinage V de ℓ, la suite (u_n) rencontre une infinité de fois V.

Si x est un réel, un voisinage de x est un ensemble qui contient $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ pour un certain $\varepsilon > 0$. Un voisinage de $+\infty$ est un ensemble qui contient $[M, +\infty]$, pour un certain M réel.

Démonstration.

Le sens direct est évident : si $u_{\phi(n)} \to \ell$, pour V voisinage de ℓ, $u_{\phi(n)} \in V$ pour n assez grand ce qui donne une infinité de k tels que $u_k \in V$.
Réciproquement, on pose $n_0 = \inf\{n \geq 1; u_n \in B(\ell, 1)\}$, puis pour $k \geq 0$: $n_{k+1} = \inf\{n > n_k; u_n \in B(\ell, \frac{1}{2^{k+1}})\}$.

Limite supérieure et valeur d'adhérence 1/3

Rappel d'analyse :

Théorème

ℓ est une valeur d'adhérence de la suite (u_n) si et seulement si pour tout voisinage V de ℓ, la suite (u_n) rencontre une infinité de fois V.

Si x est un réel, un voisinage de x est un ensemble qui contient $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ pour un certain $\varepsilon > 0$. Un voisinage de $+\infty$ est un ensemble qui contient $[M, +\infty]$, pour un certain M réel.

Démonstration.

Le sens direct est évident : si $u_{\phi(n)} \to \ell$, pour V voisinage de ℓ, $u_{\phi(n)} \in V$ pour n assez grand ce qui donne une infinité de k tels que $u_k \in V$.
Réciproquement, on pose $n_0 = \inf\{n \geq 1; u_n \in B(\ell, 1)\}$, puis pour $k \geq 0$: $n_{k+1} = \inf\{n > n_k; u_n \in B(\ell, \frac{1}{2^{k+1}})\}$.
Alors, pour $k \geq 0$, $d(\ell, u_{n_k}) \leq \frac{1}{2^k}$,

Rappel d'analyse :

Théorème

ℓ est une valeur d'adhérence de la suite (u_n) si et seulement si pour tout voisinage V de ℓ, la suite (u_n) rencontre une infinité de fois V.

Si x est un réel, un voisinage de x est un ensemble qui contient $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ pour un certain $\varepsilon > 0$. Un voisinage de $+\infty$ est un ensemble qui contient $[M, +\infty]$, pour un certain M réel.

Démonstration.

Le sens direct est évident : si $u_{\phi(n)} \to \ell$, pour V voisinage de ℓ, $u_{\phi(n)} \in V$ pour n assez grand ce qui donne une infinité de k tels que $u_k \in V$.
Réciproquement, on pose $n_0 = \inf\{n \geq 1; u_n \in B(\ell, 1)\}$, puis pour $k \geq 0$: $n_{k+1} = \inf\{n > n_k; u_n \in B(\ell, \frac{1}{2^{k+1}})\}$.
Alors, pour $k \geq 0$, $d(\ell, u_{n_k}) \leq \frac{1}{2^k}$,ce qui montre que $u_{n_k} \to \ell$. $\square$

Théorème

La limite supérieure d'une suite est sa plus grande valeur d'adhérence.

Preuve (1/2).

- Soit y une valeur d'adhérence de (u_n).

Théorème

La limite supérieure d'une suite est sa plus grande valeur d'adhérence.

Preuve (1/2).

- Soit y une valeur d'adhérence de (u_n).Prenons $x < y$ quelconque.

Théorème

La limite supérieure d'une suite est sa plus grande valeur d'adhérence.

Preuve (1/2).

- Soit y une valeur d'adhérence de (u_n).Prenons $x < y$ quelconque.Une sous-suite qui tend vers y a une infinité de termes dans $]y, +\infty]$, donc $x \in E$, ce qui entraîne que $L \geq x$.

Théorème

La limite supérieure d'une suite est sa plus grande valeur d'adhérence.

Preuve (1/2).

- Soit y une valeur d'adhérence de (u_n).Prenons $x < y$ quelconque.Une sous-suite qui tend vers y a une infinité de termes dans $]y, +\infty]$, donc $x \in E$, ce qui entraîne que $L \geq x$.Comme x peut être pris aussi proche qu'on veut de y, on a $L \geq y$.

$\square$

Preuve (2/2).

- Prenons $x < L$.
  On sait que $x \notin E \implies L \leq x$, donc par contraposée $x \in E$.

Limite supérieure et valeur d'adhérence 3/3

Preuve (2/2).

- Prenons $x < L$.
  On sait que $x \notin E \implies L \leq x$, donc par contraposée $x \in E$.
  Si $L = +\infty$, savoir que $x \in E$ pour tout $x < +\infty$ suffit à montrer que $+\infty$ est valeur d'adhérence de (u_n).

Preuve (2/2).

- Prenons $x < L$.
  On sait que $x \notin E \implies L \leq x$, donc par contraposée $x \in E$.
  Si $L = +\infty$, savoir que $x \in E$ pour tout $x < +\infty$ suffit à montrer que $+\infty$ est valeur d'adhérence de (u_n).
  Sinon, prenons $x < L$ et $y > L$.

Preuve (2/2).

- Prenons $x < L$.
  On sait que $x \notin E \implies L \leq x$, donc par contraposée $x \in E$.
  Si $L = +\infty$, savoir que $x \in E$ pour tout $x < +\infty$ suffit à montrer que $+\infty$ est valeur d'adhérence de (u_n).
  Sinon, prenons $x < L$ et $y > L$.Comme $x \in E$ et que $y \notin E$, les termes de la suite (u_n) qui dépassent x sont une infinité,

Preuve (2/2).

- Prenons $x < L$.
  On sait que $x \notin E \implies L \leq x$, donc par contraposée $x \in E$.
  Si $L = +\infty$, savoir que $x \in E$ pour tout $x < +\infty$ suffit à montrer que $+\infty$ est valeur d'adhérence de (u_n).
  Sinon, prenons $x < L$ et $y > L$.Comme $x \in E$ et que $y \notin E$, les termes de la suite (u_n) qui dépassent x sont une infinité,et à partir d'un certain rang, sont inférieurs strictement à y,

Preuve (2/2).

- Prenons $x < L$.
  On sait que $x \notin E \implies L \leq x$, donc par contraposée $x \in E$.
  Si $L = +\infty$, savoir que $x \in E$ pour tout $x < +\infty$ suffit à montrer que $+\infty$ est valeur d'adhérence de (u_n).
  Sinon, prenons $x < L$ et $y > L$.Comme $x \in E$ et que $y \notin E$, les termes de la suite (u_n) qui dépassent x sont une infinité,et à partir d'un certain rang, sont inférieurs strictement à y,donc sont dans $]x, y[$.

Preuve (2/2).

- Prenons $x < L$.
  On sait que $x \notin E \implies L \leq x$, donc par contraposée $x \in E$.
  Si $L = +\infty$, savoir que $x \in E$ pour tout $x < +\infty$ suffit à montrer que $+\infty$ est valeur d'adhérence de (u_n).
  Sinon, prenons $x < L$ et $y > L$.Comme $x \in E$ et que $y \notin E$, les termes de la suite (u_n) qui dépassent x sont une infinité,et à partir d'un certain rang, sont inférieurs strictement à y,donc sont dans $]x, y[$.
  On a montré que (u_n) rencontre une infinité de fois tout voisinage de L, donc L est une valeur d'adhérence de (u_n).

$\square$