Université de Nancy

L3

Tout ce que vous avez toujours voulu savoir sur l'intégration sans jamais avoir osé le demander

Questions

1. Qu'est ce qu'une fonction intégrable pour l'intégrale de Riemann ?
2. Qu'est ce qu'une fonction intégrable pour l'intégrale de Lebesgue ?
3. Qu'est-ce qu'une fonction localement intégrable (sur Ω intervalle de $\mathbb{R}$) ?
4. Qu'est-ce qu'une intégrale impropre ?
5. Qu'est-ce qu'une intégrale faussement impropre ?
6. Peut-on écrire $\int f$ alors que f n'est pas intégrable ?
7. Comment montrer qu'une fonction est intégrable ?
8. Quand peut-on appliquer le théorème de Tonelli ?
9. Quand peut-on appliquer le théorème de Fubini ?
10. petit o, grand O, c'est quoi ?

Réponses

1. Oulà, c'est compliqué. Ce que vous devez retenir, c'est qu'essentiellement, l'intégrale de Riemann permet d'intégrer n'importe quelle fonction continue par morceaux sur un compact et qu'alors, les fameuses "sommes de Riemann" convergent vers l'intégrale de Riemann.
2. Là encore, c'est compliqué. Une fonction f est intégrable pour l'intégrale de Lebesgue si elle est mesurable (pour les tribus boréliennes) et qu'un certain sup compliqué est fini. Il faut surtout retenir que f est intégrable pour l'intégrale de Lebesgue si et seulement si $|f|$ est intégrable pour l'intégrale de Lebesgue.
3. C'est une fonction f telle que pour tout intervalle compact K , la fonction $\mathbb{1}_K f$ est intégrable. (On peut utiliser ce vocabulaire à la fois pour Riemann et Lebesgue). Par exemple les fonctions continues sur Ω sont localement intégrables.

4. Il s'agit là d'un vocabulaire utilisé dans le cadre de ce qu'on appelle l'intégrale de Riemann généralisée (qui n'est pas une vraie intégrale, mais passons.) L'idée, c'est que si Ω est un intervalle de $\mathbb{R}$ non compact, on peut quand même l'écrire comme réunion dénombrable croissante d'intervalles compacts I_n, et du coup, on peut se poser la question de l'existence d'une limite pour la suite $\int_{I_n} f$ qui serait indépendante de la suite (I_n) considérée. Dans le cas où f est de signe constant, la suite est monotone, donc il y a toujours une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$, et il est facile de montrer qu'elle ne dépend pas de la suite (I_n). Par exemple pour $\alpha \neq -1$, on a $\int_{1/n}^1 x^\alpha\ dx = \frac{1-(1/n)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, dont la limite lorsque n tend vers l'infini et $\frac{1}{\alpha+1}$ si $\alpha > -1$ et $+\infty$ si $\alpha < -1$. Ainsi dans le premier cas, on écrira $\int_0^1 x^\alpha\ dx = \frac{1}{\alpha}$ et on dit que l'intégrale converge. Dans le deuxième cas, on dit que l'intégrale diverge, mais on peut s'autoriser à écrire $\int_0^1 x^\alpha\ dx = +\infty$.
5. On dit que l'intégrale de f sur l'intervalle borné non compact est "faussement impropre " si f se prolonge en une fonction continue par morceaux sur $\overline{\Omega}$. Par exemple $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\ dx$: à première vue on intègre sur $]0,1]$ qui est non-compact (la fonction n'est pas définie en 0), mais la fonction peut se prolonger par continuité en 0 en envoyant 0 sur 1. Il n'y a donc pas de problème de convergence.
6. Oui, dès lors que f est mesurable de signe constant (le plus souvent positif), on peut alors écrire que l'intégrale est égale à $+\infty$ (ou $-\infty$). Il faut toutefois être très vigilant sur les opérations arithmétiques (somme par exemple) que l'on peut être tenté de faire.
7. Les cas où f est une fonction continue par morceaux qu'on intègre sur un compact ou encore où f est une fonction bornée qu'on intègre sur un ensemble de mesure finie sont évidemment les plus favorables. Mais le cas le plus fréquent est celui où f est une fonction localement intégrable qui vérifie, en chaque borne a de l'intervalle $f = O(g)$, où g est une fonction que l'on sait être intégrable.Bien sûr, pour cela il faut connaître par coeur un certain nombre de fonctions intégrables : essentiellement $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ pour $\alpha > 1$ sur $[1,+\infty[$, $t \mapsto e^{-at}$ pour $a > 0$ sur $[0,+\infty[$, $t \mapsto t^\alpha$ pour $\alpha > -1$ sur $]0,1]$.
8. Dès que la fonction est positive et mesurable pour la tribu produit. En pratique, la mesurabilité pour la tribu produit se déduit souvent de la continuité de la fonction pour la topologie produit (c'est à dire la continuité comme fonction du couple). Il est aussi souvent utile de noter que la fonction $(x,t) \mapsto \mathbb{1}_{\{x<t\}} = \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(t-x)$ est $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$-

$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable.

9. Dès que la fonction est mesurable pour la tribu produit et que le théorème de Tonelli nous a permis de conclure à l'intégrabilité.
10. On dit que f est un grand O de g au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ si

$$\limsup_{x \to a} |\frac{f(x)}{g(x)}| < +\infty$$

(ici je suppose que g ne s'annule pas sur un voisinage épointé de a pour ne pas compliquer inutilement les choses). En pratique il suffit de trouver un voisinage de a et un réel M tel que $|f| \leq M|g|$ sur ce voisinage. On dit que f est un petit o de g au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ si

$$\limsup_{x \to a} |\frac{f(x)}{g(x)}| = 0$$

(même remarque concernant g). C'est bien sûr une condition plus forte d'être un petit o que d'être un grand O.On écrit $f = o(g)$ ou $f = O(g)$ pour signifier que f est un petit o ou un grand O de g. Il faut se souvenir que o, O sont implicitement des passages au quotient : on peut toujours quotienter un peu plus, mais on ne peut pas remonter. Par exemple en 0, on a $\log(1+x) = x + O(x^2)$ et $\sin(x) = x + O(x^3) = x + O(x^2)$ car en 0 un $O(x^3)$ est aussi un $O(x^2)$ et on pourra en déduire que $\log(1+x) - \sin(x) = O(x^2)$, mais certainement pas que $\log(1+x) - \sin(x) = 0$! Dans le même ordre d'idée, on dit que f est équivalent à g au voisinage de a (et on note $f(x) \sim g(x)$ si $f(x) - g(x) = o(f(x))$, où de manière équivalente (toujours en supposant que g ne s'annule pas sur un voisinage épointé de a) si $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Notons que o, O et $\sim$ sont compatibles avec la multiplication par une fonction. Ainsi $\sin(x) = x + O(x^3)$ entraîne $\frac{\sin x}{x} = 1 + O(x^2)$. Rappelons enfin que pour $\ell \neq 0$, dire qu'on a l'équivalent $f(x) \sim \ell$ est exactement la même chose que de dire que f admet une limite au point a qui est ℓ.