Université de Nancy

Licence de Mathématiques

Un calcul d'intégrale

1. *Continuité de la transformée de Laplace.*
   Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{C}$. On suppose que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ existe (c'est-à-dire que $\int_0^T f(t)\,dt$ admet une limite quand T tend vers $+\infty$). Montrer que pour tout $\lambda \geq 0$, l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t)\,dt$ existe et que la fonction $\lambda \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t)\,dt$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. (Indication : Faire une intégration par parties.)
2. Pour $x \geq 0$, on pose $R(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$. Le but de l'exercice est de démontrer l'identité
$$\int_0^{+\infty} \frac{R(x)}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{2\pi}.$$
   (a) Montrer que $R(x)$ est bien définie pour $x \geq 0$ et qu'on a en l'infini $R(x) = O(1/x)$. En déduire que R est bornée. (Indication : Faire une intégration par parties.)

   (b) $\frac{R(x)}{\sqrt{x}}$ est-elle intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$?

   (c) Pour $\lambda \geq 0$, on pose $R_\lambda(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} e^{-\lambda u}\,du$. Justifier l'existence de $R_\lambda(x)$, puis montrer que pour tout réel $x > 0$, on a la relation $\lim\limits_{\lambda \to 0} R_\lambda(x) = R(x)$.

   (d) Montrer que pour tout $\lambda > 0$, on a
$$\int_0^{+\infty} \frac{R_\lambda(x)}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{\sqrt{u}} e^{-\lambda u}\,du.$$
   (On pourra utiliser le théorème de Fubini.)

   (e) Montrer finalement que
$$\int_0^{+\infty} \frac{R(x)}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{2\pi}.$$
   (On admettra que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\,du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.)

Solution

1. Posons $I = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt$, $R(x) = I - \int_0^x f(t)\,dt = \int_x^{+\infty} f(t)\,dt$ et $S(u) = \sup_{x \geq u} |R(x)|$. S est décroissante, de limite nulle en l'infini. Soient x, y avec $0 \leq x \leq y$. $-R$ est une primitive de f, donc
$$\int_x^y f(t)e^{-\lambda t}\,dt = [-R(t)e^{-\lambda t}]_x^y - \int_x^y R(t)\lambda e^{-\lambda t}\,dt.$$
On en déduit
$$\left|\int_x^y f(t)e^{-\lambda t}\,dt\right| \leq |R(x)| + |R(y)| + \int_x^y S(x)\lambda e^{-\lambda t}\,dt \leq 3S(x) \quad (1)$$
Ainsi, d'après le critère de Cauchy, $\int_0^T e^{-\lambda t} f(t)\,dt$ admet bien une limite lorsque T tend vers l'infini, ce qui donne la convergence de l'intégrale impropre. Posons $F_n(x) = \int_0^n e^{-\lambda t} f(t)\,dt = \int_{[0,n]} e^{-\lambda t} f(t)\,d\lambda(t)$.
Comme on a
– Pour tout $t \geq 0$, $\lambda \mapsto e^{-\lambda t} f(t)$ est continue,
– Pour tout $t \geq 0$, pour tout $\lambda \geq 0$, $|e^{-\lambda t} f(t)| \leq |f(t)|$,
– $|f|$ est intégrable sur $[0, n]$,
alors pour tout n, F_n est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$. D'après l'inégalité (1), pour $n \leq p$, on a $\sup_{\lambda \in \mathbb{R}_+} |F_n(\lambda) - F_p(\lambda)| \leq 3S(n)$. Ainsi F_n vérifie un critère de Cauchy uniforme : comme limite uniforme de fonctions continues, la fonction $\lambda \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t)\,dt$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

2. (a) On a
$$\int_x^y \frac{\sin t}{t}\,dt = \left[-\cos t \times \frac{1}{t}\right]_x^y - \int_x^y \frac{\cos t}{t^2}\,dt$$
d'où pour $x \leq y$
$$\left|\int_x^y \frac{\sin t}{t}\,dt\right| \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \int_x^y \frac{dt}{t^2} = \frac{2}{x}.$$
Ainsi, d'après le critère de Cauchy, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$, est bien convergente, de même $\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$, et on a, en faisant tendre y vers l'infini dans la précédente inégalité :
$$\forall x > 0 \quad |R(x)| \leq \frac{2}{x}.$$
La fonction $x \mapsto R(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt - \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$, de limite nulle en l'infini : elle est donc bornée.

(b) Soit $M = \sup_{x\in[0,1]} |R(x)|$. M est fini d'après la question précédente. On a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}_+} \frac{|R(x)|}{\sqrt{x}}\, d\lambda(x) &= \int_{[0,1]} \frac{|R(x)|}{\sqrt{x}}\, d\lambda(x) + \int_{[1,+\infty[} \frac{|R(x)|}{\sqrt{x}}\, d\lambda(x) \\ &\leq \int_{[0,1]} \frac{M}{\sqrt{x}}\, d\lambda(x) + \int_{[1,+\infty[} \frac{2}{x^{3/2}}\, d\lambda(x) \\ &\leq 2M + 4 < +\infty,\end{aligned}$$

donc $\frac{R(x)}{\sqrt{x}}$ est bien intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

(c) Il suffit d'appliquer la question 1) à la fonction $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ (ou si on préfère $f(t) = \frac{\sin(x+t)}{x+t}$).

(d) Posons pour u et x réels positifs :

$$F(u,x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \mathbb{1}_{\{x\leq u\}} \frac{\sin u}{u} e^{-\lambda u}.$$

Il est facile de voir que F est $(\mathbb{R}_+^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2))$-mesurable. Comme $|\frac{\sin u}{u}| \leq 1$, on a pour tout $x > 0$

$$\int_{\mathbb{R}_+} |F(u,x)|\, d\lambda(u) \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \int_{[x,+\infty[} e^{-\lambda u}\, d\lambda(u) = \frac{1}{\lambda}\frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\lambda x},$$

d'où

$$\int_{\mathbb{R}_+} |F(u,x)|\, d\lambda(u)\, d\lambda(x) \leq \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{\lambda}\frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\lambda x}\, d\lambda(x) < +\infty.$$

(On majore $\frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\lambda x}$ par $\frac{1}{\sqrt{x}}$ entre 0 et 1 et par $e^{-\lambda x}$ entre 1 et l'infini.) Ainsi, d'après le théorème de Tonelli $(u,x) \mapsto F(u,x)$ est intégrable par rapport à $\lambda \otimes \lambda$ sur $\mathbb{R}_+^2$. Avec le théorème de Fubini, cette intégrale vaut, d'une part

$$\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}_+} F(u,x)\, d\lambda(u)\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{R_\lambda(x)}{\sqrt{x}}\, d\lambda(x),$$

d'autre part

$$\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}_+} F(u,x)\, d\lambda(x)\, d\lambda(u)$$

Or

$$\int_{\mathbb{R}_+} F(u,x)\, d\lambda(x) = \int_{[0,u]} \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{\sin u}{u} e^{-\lambda u} = 2\frac{\sin u}{\sqrt{u}} e^{-\lambda u},$$

d'où
$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{R_\lambda(x)}{\sqrt{x}}\ d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}_+} 2\frac{\sin u}{\sqrt{u}} e^{-\lambda u}\ d\lambda(u)$$
Comme les fonctions considérées sont continues sur $]0,+\infty[$ et intégrables par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$, on a aussi l'égalité entre les intégrales de Riemann impropres correspondantes.

(e) On sait que l'intégrale de Riemann impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\ du$ est convergente. D'après le 1), on en déduit que

$$\lim_{\lambda\to 0^+} \int_0^{+\infty} 2\frac{\sin u}{\sqrt{u}} e^{-\lambda u}\ du = 2\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\ du = 2\sqrt{\pi/2} = \sqrt{2\pi}.$$

Vu la question précédente, il n'y a plus qu'à montrer que

$$\lim_{\lambda\to 0^+} \int_{[0,+\infty[} \frac{R_\lambda(x)}{\sqrt{x}}\ d\lambda(x) = \int_{[0,+\infty[} \frac{R(x)}{\sqrt{x}}\ d\lambda(x).$$

On sait que $\lim_{\lambda\to 0} R_\lambda(0) = R(0)$, donc il existe λ_0 et M tel que $|R_\lambda(0)| \le M$ pour $\lambda \in [0,\lambda_0]$. Par ailleurs, pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$|R_\lambda(x) - R_\lambda(0)| = \left|\int_0^x \frac{\sin t}{t} e^{-\lambda t}\ dt\right| \le \int_0^x 1\ dt = x \le 1.$$

Ainsi pour tout $\lambda \in [0,\lambda_0]$ et tout $x \in [0,1]$, on a

$$|R_\lambda(x)| \le |R_\lambda(0)| + |R_\lambda(x) - R_\lambda(0)| \le M+1$$

et $|\frac{R_\lambda(x)}{\sqrt{x}}| \le \frac{M+1}{\sqrt{x}}$. Ainsi, avec le théorème de convergence dominée, on a

$$\lim_{\lambda\to 0^+} \int_{[0,1]} \frac{R_\lambda(x)}{\sqrt{x}}\ d\lambda(x) = \int_{[0,1]} \frac{R(x)}{\sqrt{x}}\ d\lambda(x).$$

Par ailleurs, une intégration par parties donne

$$\int_x^y \frac{e^{(i-\lambda)t}}{t}\ dt = \left[\frac{e^{(i-\lambda)t}}{t}\right]_x^y + \int_x^y \frac{e^{(i-\lambda)t}}{t^2}\frac{1}{i-\lambda}\ d\lambda(t).$$

Pour $\lambda \ge 0$, on a $|e^{(i-\lambda)t}| = e^{-\lambda t} \le 1$ et

$$|\lambda - i| = \sqrt{1+\lambda^2} \ge 1.$$

En procédant comme en 2a), on en déduit la convergence de l'intégrale $\int_x^{+\infty} \frac{e^{(i-\lambda)t}}{t}\, dt$ et la majoration $|\int_x^{+\infty} \frac{e^{(i-\lambda)t}}{t}\, dt| \leq \frac{2}{x}$, d'où l'on déduit en prenant la partie imaginaire : $|R_\lambda(x)| \leq \frac{2}{x}$, puis

$$\forall \lambda \geq 0 \quad \forall x > 0 \qquad \left| \frac{R_\lambda(x)}{\sqrt{x}} \right| \leq \frac{2}{x^{3/2}}.$$

En appliquant encore le théorème de convergence dominée, on a

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \int_{[1,+\infty[} \frac{R_\lambda(x)}{\sqrt{x}}\, d\lambda(x) = \int_{[1,+\infty[} \frac{R(x)}{\sqrt{x}}\, d\lambda(x),$$

d'où

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \int_{[0,+\infty[} \frac{R_\lambda(x)}{\sqrt{x}}\, d\lambda(x) = \int_{[0,+\infty[} \frac{R(x)}{\sqrt{x}}\, d\lambda(x),$$

ce qui achève la preuve.