Université de Nancy

Licence de Mathématiques

Fonction digamma

Rappel : on a vu en exercice que la fonction Γ, définie sur $]0,+\infty[$ par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\, d\lambda(t).$$

vérifie $\forall n \in \mathbb{N} \quad \Gamma(n+1) = n!$.

On ne demande pas ici de redémontrer ce résultat, mais vous devez savoir le faire. Pour $x > 0$ on pose

$$\psi(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}} \right) dt.$$

1. Vérifier que ψ est bien définie et est continue sur $]0,+\infty[$.
   Indication : on pourra d'abord se placer sur un intervalle $[a,b]$, avec $0 < a < b < +\infty$.
2. Montrer, pour $x > 0$, l'identité $\psi(x+1) = \psi(x) + \frac{1}{x}$.
3. (a) Montrer que pour tout $x > 0$, on a $\lim\limits_{\substack{k \to +\infty \\ k \in \mathbb{N}}} \psi(x+k) - \psi(k) = 0$.

   (b) Montrer que pour tout $x > 0$,
   $$\psi(x+1) = \psi(1) + \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{x+i} \right).$$
4. (a) Montrer que pour tout entier naturel non nul k, on a
   $$\int_0^{+\infty} t^k \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\, dt = \zeta(k+1)k!.$$
   (On rappelle que la fonction ζ est définie, pour $s > 1$, par $\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} n^{-s}$.)

   (b) En déduire que pour $x \in]-1,1[$, on a
   $$\psi(1+x) = \psi(1) + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1}\zeta(k+1)x^k.$$

5. (a) Pour $u > 0$, on pose

$$F(u) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-ut}}{t}\, dt.$$

Vérifier que F est bien définie sur $]0, +\infty[$, puis montrer qu'elle est dérivable. En déduire la valeur de F.

(b) Montrer que pour tout $x > 0$ et pour tout entier naturel p, on a

$$\psi(px) = \ln p + \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} \psi(x + \frac{i}{p}).$$

Solution

1. Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}}$ est continue sur $]0, +\infty[$, donc localement intégrable sur $]0, +\infty[$. Observons le comportement lorsque t tend vers 0. On a
$$\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}} = \frac{(1-e^{-t})e^{-t} - te^{-xt}}{t(1-e^{-t})}.$$
En 0, on a $1 - e^{-t} \sim t$, d'où $t(1-e^{-t}) \sim t^2$. Pour le numérateur,
$$\begin{aligned} e^{-t} - e^{-2t} - te^{-xt} &= (1 - t + O(t^2)) - (1 - 2t + O(t^2)) - t(1 + O(t)) \\ &= (t + O(t^2)) - (t + O(t^2)) \\ &= O(t^2). \end{aligned}$$
Finalement $\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}} = O(1)$ au voisinage de 0 ce qui donne l'intégrabilité sur $]0, \max(1, x)]$. Pour $t \in [\max(1, x), +\infty[$, on a
$$|\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}}| \leq \frac{e^{-t}}{t} + \frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}} \leq e^{-t} + \frac{1}{1-e^{-x}} e^{-xt},$$
ce qui donne l'intégrabilité sur $[1, +\infty[$. Soient a, b avec $0 < a < b < +\infty$. Si $x \in [a, b]$, on a pour tout $t > 0$
$$\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-at}}{1-e^{-t}} \leq \frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}} \leq \frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-bt}}{1-e^{-t}},$$
d'où
$$|\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}}| \leq |\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-at}}{1-e^{-t}}| + |\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-bt}}{1-e^{-t}}|.$$
Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto \frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}}$ est continue sur $[a, b]$. Comme $|\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-at}}{1-e^{-t}}| + |\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-bt}}{1-e^{-t}}|$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, on en déduit la continuité de ψ sur $[a, b]$. En particulier, pour tout $x > 0$, ψ est continue sur $[x/2, 2x]$ qui est un voisinage de x : ψ est donc bien continue sur $]0, +\infty[$ tout entier.

2. On a facilement
$$\psi(x+1) - \psi(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\, dt = \frac{1}{x}.$$

3. (a) On a
$$\psi(x+k)-\psi(k)=\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-xt}}{1-e^{-t}}e^{-kt}\,dt.$$
Pour tout $t>0$
$$\lim_{k\to+\infty}\frac{1-e^{-xt}}{1-e^{-t}}e^{-kt}=0.$$
De plus pour tout entier $k\geq 1$
$$0\leq\frac{1-e^{-xt}}{1-e^{-t}}e^{-kt}\leq\frac{1-e^{-xt}}{1-e^{-t}}e^{-t}=\frac{e^{-t}-e^{-(x+1)t}}{1-e^{-t}}\leq|\frac{e^{-t}}{t}-\frac{e^{-1.t}}{1-e^{-t}}|+|\frac{e^{-t}}{t}-\frac{e^{-(x+1)t}}{1-e^{-t}}|,$$
qui est bien une fonction intégrable ne dépendant pas de k. Ainsi, d'après le théorème de convergence dominée
$$\lim_{k\to+\infty}\psi(x+k)-\psi(k)=0.$$

(b) On a
$$\psi(i+1)-\psi(i)=\frac{1}{i}\text{ et }\psi(x+i+1)-\psi(x+i)=\frac{1}{x+i},$$
d'où en faisant la différence
$$(\psi(i+1)-\psi(i))-(\psi(x+i+1)-\psi(x+i))=\frac{1}{i}-\frac{1}{x+i}$$
et, sommant pour i de 1 à $k-1$
$$(\psi(k)-\psi(1))-(\psi(x+k)-\psi(x+1))=\sum_{i=1}^{k-1}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{x+i}\right).$$
Ainsi
$$\psi(x+1)=\psi(1)+\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{i}-\frac{1}{x+i+1}+(\psi(x+k)-\psi(k)).$$
On obtient l'égalité désirée en faisant tendre k vers l'infini.

4. (a) Comme $y/(1-y)=\sum_{p\geq 1}y^p$ pour $0<y<1$, on a pour tout $t>0$:
$$t^k\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}=\sum_{p=1}^{+\infty}t^ke^{-pt}.$$

Comme la série est à termes positifs, le théorème de convergence monotone donne

$$\int_0^{+\infty} t^k \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\ dt = \sum_{p=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} t^k e^{-pt}\ dt.$$

Cependant

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} t^k e^{-pt}\ dt &= \frac{1}{p^{k+1}} \int_0^{+\infty} (pt)^k e^{-pt}\ pdt \\ &= \frac{1}{p^{k+1}} \int_0^{+\infty} u^k e^{-u}\ du\end{aligned}$$

La preuve de l'identité $\int_0^{+\infty} u^k e^{-u}\ du = k!$ est classique ; on ne la rappelle pas ici. On a donc

$$\int_0^{+\infty} t^k \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^{k+1}} k! = k!\zeta(k+1).$$

(b)

$$\psi(x+1)-\psi(1) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}-e^{-t(1+x)}}{1-e^{-t}}\ dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}(1-e^{-tx})}{1-e^{-t}}\ dt.$$

On a

$$\frac{e^{-t}(1-e^{-tx})}{1-e^{-t}} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} -\frac{(-xt)^k}{k!}\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}$$

A x fixé avec $x \in]-1,1[$, si on pose $f_n(t) = \sum_{k=1}^n -\frac{(-xt)^k}{k!}\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}$, on a

$$|f_n(t)| \le \sum_{k=1}^{n} \frac{|xt|^k}{k!}\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} \le (e^{|x|t}-1)\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} = \frac{e^{-(1-|x|)t}-e^{-t}}{1-e^{-t}}.$$

qui est une fonction intégrable. Ainsi, d'après le théorème de convergence dominée,

$$\psi(x+1)-\psi(1) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\ dt$$

Cependant

$$\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}x^k\frac{1}{k!}\int_0^{+\infty} t^k \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\,dt = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}x^k\zeta(k+1),$$

d'où

$$\psi(x+1)-\psi(1)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\zeta(k+1)x^k,$$

ce qui donne le résultat voulu.

5. (a) À u fixé, la fonction $t\mapsto \frac{e^{-t}-e^{-ut}}{t}$ est continue sur $]0,+\infty[$, donc localement intégrable sur $]0,+\infty[$. En outre, $\lim_{t\to 0}\frac{e^{-t}-e^{-ut}}{t}=u-1$, donc la fonction se prolonge par continuité en 0, donc l'intégrale est "faussement impropre" en 0. En l'infini, on a $\frac{e^{-t}-e^{-ut}}{t}=O(e^{-(\min(1,u)t})$, d'où la convergence de l'intégrale. Par ailleurs $\frac{\partial}{\partial u}\frac{e^{-t}-e^{-ut}}{t}=e^{-ut}$, ce qui nous donne pour tout $a>0$

$$\forall u\in[a,+\infty[\quad \forall t>0\quad |\frac{\partial}{\partial u}\frac{e^{-t}-e^{-ut}}{t}|=e^{-ut}\le e^{-at}.$$

Or $t\mapsto e^{-at}$ est intégrable, indépendante de u donc $u\mapsto F(u)$ est C^1 sur $]a,+\infty[$, avec $F'(u)=\int_0^{+\infty}e^{-ut}\,dt=\frac{1}{u}$. Comme a est quelconque strictement positif, le résultat est bien C^1 sur $]0,+\infty[$ tout entier avec $F'(u)=\frac{1}{u}$. Ainsi pour $x>0$, $F(x)=F(1)+\int_1^x F'(u)\,du=0+\int_1^x\frac{du}{u}=\log x$.

(b)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p}\sum_{i=0}^{p-1}\psi(x+\frac{i}{p}) &= \frac{1}{p}\sum_{i=0}^{p-1}\int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-t}}{t}-\frac{e^{-(x+i/p)t}}{1-e^{-t}}\right)\,dt\\
&= \int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-t}}{t}-\frac{1}{p}\frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}}\sum_{i=0}^{p-1}e^{-(i/p)t}\right)\,dt\\
&= \int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-t}}{t}-\frac{1}{p}\frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}}\frac{1-e^{-t}}{1-e^{-(1/p)t}}\right)\,dt\\
&= \int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-t}}{t}-\frac{1}{p}\frac{e^{-xt}}{1-e^{-t/p}}\right)\,dt\\
&= \int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-t}-e^{-t/p}}{t}+\frac{1}{p}\frac{e^{-t/p}}{t/p}-\frac{1}{p}\frac{e^{-xt}}{1-e^{-t/p}}\right)\,dt\\
&= F(1/p)+\int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-t/p}}{t/p}-\frac{e^{-px(t/p)}}{1-e^{-t/p}}\right)\,\frac{dt}{p}\\
&= \log 1/p+\int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-u}}{u}-\frac{e^{-pxu}}{1-e^{-u}}\right)\,du\\
&= -\log p+\psi(px),
\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat voulu.