Université de Lorraine **L3 Mathématiques – année 2023-2024**

Problème. Permutation aléatoire

Le but de ce problème est d'étudier certaines propriétés statistiques d'une permutation que l'on choisit uniformément au hasard parmi les permutations de $\{1,\dots,n\}$.

Notations et rappels.
• *Permutations.* Si E est un ensemble fini, on note $|E|$ son cardinal. Une *permutation* de E est une bijection de E dans E et on note $\mathfrak{S}(E)$ l'ensemble des permutations de E. Si $|E|=n$, alors $|\mathfrak{S}(E)|=n!$. Pour $n\geqslant 1$, on note pour simplifier $\mathfrak{S}(\{1,\dots,n\})=\mathfrak{S}_n$.
• *Arrangements.* Si E est un ensemble fini, et si $1\leqslant k\leqslant |E|$, on note $\mathfrak{I}_k(E)$ l'ensemble des k-uplets sans répétitions de E. Si $|E|=n$, alors $|\mathfrak{I}_k(E)|=\dfrac{n!}{(n-k)!}$.
• *Parties.* On note $\mathcal{B}_k(E)$ l'ensemble des parties à k éléments de E.
Si $0\leqslant k\leqslant n=|E|$, on a $|\mathcal{B}_k(E)|=\dbinom{n}{k}$.

On fixe un entier $n\geqslant 2$. Afin d'étudier une permutation aléatoire de $\{1,\dots,n\}$, on munit $\mathfrak{S}_n$ de la tribu de toutes ses parties et de la probabilité uniforme $\mathbb{P}_n$, et on note $\mathbb{E}_n$ (resp. Var_n et Cov_n) l'espérance (resp. la variance et la covariance) par rapport à $\mathbb{P}_n$.

Échauffement.

1. On fixe une partie A de $\{1,\dots,n\}$ telle que A et A^c sont non vides. Soit $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ telle que $\sigma(A)=A$. Monter que les restrictions

$$\begin{array}{rcl}\sigma_{|A}:A & \to & A\\ i & \mapsto & \sigma(i)\end{array}\quad\text{et}\quad\begin{array}{rcl}\sigma_{|A^c}:A^c & \to & A^c\\ i & \mapsto & \sigma(i)\end{array}$$

sont des permutations de A et de A^c respectivement.

I – Moyenne et variance du nombre de points fixes

On dit que $i\in\{1,\dots,n\}$ est un *point fixe* de $\sigma\in\mathfrak{S}_n$, ou encore que σ fixe i, si $\sigma(i)=i$. On note V_i l'ensemble des permutations qui fixent i :

$$V_i=\{\sigma\in\mathfrak{S}_n:\ \sigma(i)=i\}.$$

On note $N:\mathfrak{S}_n\to\mathbb{N}$ la variable aléatoire qui associe à une permutation σ son nombre de points fixes :

$$\forall\sigma\in\mathfrak{S}_n\quad N(\sigma)=\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{V_i}(\sigma).$$

2. Soit A une partie de $\{1,\dots,n\}$ telle que A et A^c sont non vides. On pose

$$V_A=\{\sigma\in\mathfrak{S}_n:\ \forall i\in A,\ \sigma(i)=i\}\quad\text{et}\quad\begin{array}{rcl}\varphi:V_A & \to & \mathfrak{S}(A^c)\\ \sigma & \mapsto & \sigma_{|A^c}\end{array}.$$

Montrer que φ est une bijection et en déduire que si on note $k = |A|$, on a

$$\mathbb{P}_n(V_A) = \frac{1}{n(n-1)\dots(n-k+1)}.$$

Vérifier que le résultat reste vrai pour $A = \{1, \dots, n\}$.

3. Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. Quelle est la loi de $\mathbb{1}_{V_i}$? Donner son espérance et sa variance.
4. Soient i et j deux entiers distincts dans $\{1, \dots, n\}$. Montrer que $\mathrm{Cov}(\mathbb{1}_{V_i}, \mathbb{1}_{V_j}) = \dfrac{1}{n^2(n-1)}$.
   Les variables $\mathbb{1}_{V_i}$ et $\mathbb{1}_{V_j}$ sont-elles indépendantes ?
5. Montrer que $\mathbb{E}_n(N) = \mathrm{Var}_n(N) = 1$.
6. $(*)$ *Généralisation.* On fixe une partie F de $\{1, \dots, n\}$, et un entier $k \in \{1, \dots, n\}$. Montrer que

$$\sum_{A \subset \{1,\dots,n\}, |A|=k} \mathbf{1}_{A \subset F} = \binom{|F|}{k}.$$

   En considérant l'ensemble $F(\sigma)$ des points fixés par une permutation σ, en déduire que

$$\mathbb{E}_n(N(N-1)\dots(N-k+1)) = 1.$$

II – Espérance du nombre d'orbites

Pour $i \in \{1, \dots, n\}$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note $O_i(\sigma)$ l'*orbite* de i sous l'action de σ, c'est-à-dire

$$O_i(\sigma) = \{\sigma^k(i) : \ k \in \mathbb{N}\},$$

et $M : \mathfrak{S}_n \to \mathbb{N}$ la variable aléatoire qui associe à une permutation σ son nombre d'orbites $M(\sigma)$. Par exemple, la permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 & 7 & 6 & 8 \end{pmatrix},$$

possède 4 orbites différentes : $O_1(\sigma) = O_2(\sigma) = O_3(\sigma) = \{1, 2, 3\}$, $O_4(\sigma) = O_5(\sigma) = \{4, 5\}$, $O_6(\sigma) = O_7(\sigma) = \{6, 7\}$ et $O_8(\sigma) = \{8\}$. On a donc $M(\sigma) = 4$.
On rappelle que pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, les orbites de σ forment une partition de $\{1, \dots, n\}$.

7. On fixe un point $i \in \{1, \dots, n\}$ et une partie $A \subset \{1, \dots, n\}$ contenant i et de cardinal $k \geqslant 2$. Montrer que l'application

$$\psi : \sigma \mapsto ((\sigma(i), \sigma^2(i), \dots, \sigma^{k-1}(i)), \sigma_{|A^c})$$

   est une bijection de $W_{i,A} = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \ O_i(\sigma) = A\}$ dans $\mathfrak{I}_{k-1}(A \backslash \{i\}) \times \mathfrak{S}(A^c)$,
   En déduire que quand on prend une permutation aléatoire de $\{1, \dots, n\}$, la probabilité que l'orbite de i soit A est

$$\mathbb{P}_n(O_i = A) = \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!}.$$

   Vérifier que le résultat reste valide pour $A = \{i\}$.

8. Soit $i, k \in \{1, \ldots, n\}$. Montrer que $\mathbb{P}_n(|O_i| = k) = \dfrac{1}{n}$.
9. Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$. Exprimer $\mathbb{E}_n\left(\dfrac{1}{|O_i|}\right)$ et $\mathrm{Var}_n\left(\dfrac{1}{|O_i|}\right)$ en fonction des sommes
$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \text{ et } S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$
10. Montrer que pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $M(\sigma) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|O_i(\sigma)|}$.
11. Montrer que $\mathbb{E}_n(M) = H_n$, puis établir l'équivalent en l'infini : $\mathbb{E}_n(M) \sim \ln(n)$.

(∗) III – Majoration de la variance du nombre d'orbites

12. Soit A et B deux parties disjointes non vides de $\{1, \ldots, n\}$ et soit $i \in A$ et $j \in B$.
On pose $k = |A|$ et $\ell = |B|$. Montrer que
$$\mathbb{P}_n(O_i = A \text{ et } O_j = B) = \frac{(k-1)!(\ell-1)!(n-(k+\ell))!}{n!}.$$
On pourra, sans démonstration, exhiber une bijection entre deux ensembles bien choisis.

On fixe maintenant deux éléments i et j distincts de $\{1, \ldots, n\}$, et deux entiers k et ℓ compris entre 1 et n.

13. Montrer que $\mathbb{P}_n(O_i \neq O_j,\ |O_i| = k,\ |O_j| = \ell) = \dfrac{1}{n(n-1)} \mathbb{1}_{\{k+\ell \leqslant n\}}$.
14. Montrer que $\mathbb{P}_n(O_i = O_j,\ |O_i| = k) = \dfrac{k-1}{n(n-1)}$.
15. Montrer que $\mathbb{P}_n(|O_i| = k,\ |O_j| = k) = \dfrac{(k-1) + \mathbb{1}_{\{2k \leqslant n\}}}{n(n-1)}$.
16. Si $i \neq j$, montrer que
$$\mathrm{Cov}\left(\frac{1}{|O_i|}, \frac{1}{|O_j|}\right) = \frac{1}{n(n-1)}(V_n + H_n - S_n) - \frac{H_n^2}{n^2}, \text{ avec } V_n = \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ 1 \leqslant \ell \leqslant n \\ k+\ell \leqslant n}} \frac{1}{k}\frac{1}{\ell}.$$
17. Montrer que $\mathrm{Var}_n(M) \leqslant H_n$.

IV – Concentration du nombre d'orbites

Pour traiter cette partie, on peut admettre les résultats des parties précédentes, en particulier
$$\mathbb{E}_n(M) = H_n,\ \mathrm{Var}_n(M) \leqslant H_n, \text{ et } H_n \sim \ln n.$$

18. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}_n\left(\left|\dfrac{M}{H_n} - 1\right| > \varepsilon\right)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
19. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}_n\left(\left|\dfrac{M}{\ln n} - 1\right| > \varepsilon\right)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Solution

1. • Comme $\sigma(A) = A$, $\sigma_{|A}$ est bien à valeurs dans A, et de plus surjective. Comme A est un ensemble fini, elle est donc bijective.

   • Comme σ est injective, $\sigma(A) \cap \sigma(A^c) = \varnothing$, et donc $\sigma(A^c) \subset (\sigma(A))^c = A^c$, et $\sigma_{|A^c}$ est donc bien à valeur dans A^c. Comme σ est injective, $\sigma_{|A^c}$ l'est aussi. Comme A^c est fini, $\sigma_{|A^c}$ est donc bijective.

2. Soit A une partie non vide de $\{1, \dots, n\}$, telle que A^c soit elle aussi non vide. On note $V_A = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \ \forall i \in A,\ \sigma(i) = i\}$. En particulier, si $\sigma \in V_A$, alors $\sigma(A) = A$ et la question précédente assure que l'application ci-dessous est bien définie :

$$\begin{array}{rcl}\varphi : V_A & \to & \mathfrak{S}(A^c) \\ \sigma & \mapsto & \sigma_{|A^c}.\end{array}$$

   • Montrons que φ est injective. Soit σ et τ dans V_A. Supposons que $\varphi(\sigma) = \varphi(\tau)$. On a donc $\sigma_{|A^c} = \tau_{|A^c}$. Soit $i \in \{1, \dots, n\}$:
   — soit $i \in A$, et alors $\sigma(i) = i = \tau(i)$ puisque σ et τ sont dans V_A ;
   — soit $i \in A^c$, et alors $\sigma(i) = \sigma_{|A^c}(i) = \tau_{|A^c}(i) = \tau(i)$.
   Donc $\sigma = \tau$ et φ est injective.

   • Montrons que φ est surjective. Soit $\tau \in \mathfrak{S}(A^c)$. Posons

$$\begin{array}{rcl}\sigma : \{1, \dots, n\} & \to & \{1, \dots, n\} \\ i & \mapsto & \begin{cases} i & \text{si } i \in A, \\ \tau(i) & \text{si } i \in A^c. \end{cases}\end{array}$$

   Montrons que σ est surjective. Soit $y \in \{1, \dots, n\}$.
   — soit $y \in A$, alors $y = \sigma(y)$ et y est un antécédent de y pour σ ;
   — soit $y \in A^c$, et comme $\tau^{:} A^c \to A^c$ est surjective, il existe $x \in A^c \subset \{1, \dots, n\}$ tel que $\sigma(x) = \tau(x) = y$.
   Donc $\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ est surjective, et comme $\{1, \dots, n\}$ est fini, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.
   Par construction, $\sigma_{|A^c} = \tau$, et donc $\varphi(\sigma) = \tau$, ce qui assure la surjectivité de φ.

   • φ est injective et surjective, donc bijective. On a donc

$$|V_A| = |\mathfrak{S}(A^c)| = (n-k)!$$
$$\mathbb{P}_n(V_A) = \frac{|V_A|}{|\mathfrak{S}_n|} = \frac{(n-k)!}{n!}.$$

   Si $A = \{1, \dots, n\}$, alors V_A est réduit à la fonction identité sur $\{1, \dots, n\}$, et

$$P_n(V_A) = \frac{1}{|\mathfrak{S}_n|} = \frac{1}{n!}.$$

   La formule précédente reste valable (avec $k = n = |A|$).

3. Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. La variable aléatoire $\mathbb{1}_{V_i}$ est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}_n(V_i)$. Avec la question précédente, il vient

$$\mathbb{P}_n(V_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}, \quad \mathbb{E}_n(\mathbb{1}_{V_i}) = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \mathrm{Var}_n(\mathbb{1}_{V_i}) = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{n-1}{n^2}.$$

4. Soient i et j deux entiers distincts dans $\{1, \dots, n\}$. Avec la question précédente,

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(\mathbb{1}_{V_i}, \mathbb{1}_{V_j}) &= \mathbb{E}_n(\mathbb{1}_{V_i}\mathbb{1}_{V_j}) - \mathbb{E}_n(\mathbb{1}_{V_i})\mathbb{E}_n(\mathbb{1}_{V_j}) \\ &= \mathbb{E}_n(\mathbb{1}_{V_{\{i,j\}}}) - \mathbb{E}_n(\mathbb{1}_{V_i})\mathbb{E}_n(\mathbb{1}_{V_j}) = \mathbb{P}_n(V_{\{i,j\}}) - \mathbb{P}_n(V_i)\mathbb{P}_n(V_j) \\ &= \frac{(n-2)!}{n!} - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2(n-1)}.\end{aligned}$$

La covariance entre ces deux variables aléatoires étant non nulle, elles ne sont pas indépendantes.

5. Pour calculer $\mathbb{E}_n(N)$ et $\mathrm{Var}_n(N)$, on utilise l'expression de N comme une somme de variables aléatoires de Bernoulli non indépendantes :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_n(N) &= \mathbb{E}_n\left(\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{V_i}\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_n(\mathbb{1}_{V_i}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} = 1, \\ \mathrm{Var}_n(N) &= \mathrm{Var}_n\left(\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{V_i}\right) = \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}_n(\mathbb{1}_{V_i}) + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \mathrm{Cov}_n(\mathbb{1}_{V_i}, \mathbb{1}_{V_j}) \\ &= n\frac{n-1}{n^2} + 2\binom{n}{2}\frac{1}{n^2(n-1)} = \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n} = 1.\end{aligned}$$

6. $(*)$ *Généralisation.* On fixe une partie F de $\{1, \dots, n\}$, et un entier $k \in \{1, \dots, n\}$.

$\displaystyle\sum_{A\subset\{1,\dots,n\},|A|=k} \mathbf{1}_{A\subset F}$ compte le nombre de parties de F à k éléments, et vaut donc $\displaystyle\binom{|F|}{k}$.

Soit A une partie de $\{1, \dots, n\}$ à k éléments : $A \subset F(\sigma)$ si et seulement si $\sigma \in V_A$, et donc, en remarquant que $N(\sigma) = |F(\sigma)|$, on a

$$\binom{N(\sigma)}{k} = \binom{|F(\sigma)|}{k} = \sum_{A\subset\{1,\dots,n\},|A|=k} \mathbf{1}_{A\subset F(\sigma)} = \sum_{A\subset\{1,\dots,n\},|A|=k} \mathbf{1}_{\sigma\in V_A}.$$

Par linéarité de l'espérance, on obtient

$$\mathbb{E}_n\left(\binom{N(\sigma)}{k}\right) = \mathbb{E}_n\left(\sum_{A\subset\{1,\dots,n\},|A|=k} \mathbf{1}_{V_A}\right) = \sum_{A\subset\{1,\dots,n\},|A|=k} \mathbb{P}_n(V_A) = \binom{n}{k}\frac{(n-k)!}{n!} = \frac{1}{k!},$$

puis $\mathbb{E}_n(N(N-1)\dots(N-k+1)) = k!\,\mathbb{E}_n\left(\binom{N(\sigma)}{k}\right) = 1.$

II

7. On fixe un point $i \in \{1, \dots, n\}$ et une partie $A \subset \{1, \dots, n\}$ contenant i et de cardinal $k \geqslant 2$, puis on pose $W_{i,A} = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \ O_i(\sigma) = A\}$ et

$$\begin{array}{rccl}\psi : & W_{i,A} & \to & \mathfrak{I}_{k-1}(A\backslash\{i\}) \times \mathfrak{S}(A^c) \\ & \sigma & \mapsto & ((\sigma(i), \sigma^2(i), \dots, \sigma^{k-1}(i)), \sigma_{|A^c})\end{array}.$$

• Vérifions que Ψ est bien définie. Soit $\sigma \in W_{i,A}$. La partie A est une orbite de σ, et donc par définition $\sigma(A) = A$. La question 1 assure que $\sigma_{|A^c} \in \mathfrak{S}(A^c)$.

De plus, A est l'orbite de i sous l'action de σ donc, comme $|A| = k$,

$$A = O_i(\sigma) = \{\sigma^\ell(i) : 0 \leqslant \ell \leqslant k-1\}.$$

Ainsi, $(\sigma(i), \sigma^2(i), \dots, \sigma^{k-1}(i))$ est un $(k-1)$-uplet sans répétition de $A\backslash\{i\}$ et $\sigma^k(i) = i$
• Montrons que ψ est injective. Soit σ et τ dans $\sigma \in W_{i,A}$. Supposons que $\psi(\sigma) = \psi(\tau)$, et soit $j \in \{1, \dots, n\}$:

— soit $j \in A^c$, et comme $\sigma_{|A^c} = \tau_{|A^c}$, alors $\sigma(j) = \sigma_{|A^c}(j) = \tau_{|A^c}(j) = \tau(j)$;
— soit $j \in A$ et il existe $\ell \in \{0, \dots, k-1\}$ tel que $j = \sigma^\ell(i)$. Comme $\psi(\sigma) = \psi(\tau)$, on a $\sigma^\ell(i) = \tau^\ell(i)$, et donc $\sigma(j) = \sigma^{\ell+1}(i)$ et $\tau(j) = \tau^{\ell+1}(j)$:
  — si $\ell \leqslant k-2$, alors $\psi(\sigma) = \psi(\tau)$ implique $\sigma^{\ell+1}(i) = \tau^{\ell+1}(i)$ et donc $\sigma(j) = \tau(j)$;
  — si $\ell = k-1$, comme $O_i(\sigma) = A$ alors $\sigma(j) = \sigma^k(i) = i$ et de même $\tau(j) = \tau^k(i) = i$, et donc $\sigma(j) = \tau(j)$.

Dans tous les cas, $\sigma(j) = \tau(j)$, donc $\sigma = \tau$ et ψ est injective.

• Montrons que ψ est surjective. Soit $(a_\ell)_{1\leqslant \ell \leqslant k-1}$ un $(k-1)$-uplet sans répétition de $A\backslash\{i\}$ et soit $\tau \in \mathfrak{S}(A^c)$. Notons a_0 l'unique élément de A qui n'apparait pas dans $(a_\ell)_{1\leqslant \ell \leqslant k-1}$. Ainsi, $A = \{a_\ell : 0 \leqslant \ell \leqslant k-1\}$. Posons

$$\begin{array}{rcl} \sigma : \{1, \dots, n\} & \to & \{1, \dots, n\} \\ j & \mapsto & \begin{cases} a_{\ell+1} & \text{si } j = a_\ell \text{ avec } 0 \leqslant \ell \leqslant k-2, \\ a_0 & \text{si } j = a_{k-1}, \\ \tau(j) & \text{si } j \in A^c. \end{cases} \end{array}.$$

Par construction, $\sigma(A) = A$, et $\sigma_{|A} : A \to A$ est bijective. De plus, $\sigma_{|A^c} = \tau$ est aussi bijective. On en déduit facilement que $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, puis on vérifie que $\psi(\sigma) = ((a_\ell)_{1\leqslant \ell \leqslant k-1}, \tau)$, et donc ψ est surjective.

• ψ est donc bijective, et on a

$$|W_{i,A}| = |\mathfrak{I}_{k-1}(A\backslash\{i\}) \times \mathfrak{S}(A^c)| = |\mathfrak{I}_{k-1}(A\backslash\{i\})| \times |\mathfrak{S}(A^c)| = (k-1)!(n-k)!$$

$$\mathbb{P}_n(O_i = A) = \frac{|W_{i,A}|}{|\mathfrak{S}_n} = \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!}.$$

• $\mathbb{P}_n(O_i = \{i\}) = \mathbb{P}_n(\sigma(i) = i) = \mathbb{P}_n(V_i) = \frac{1}{n}$, et on vérifie que la formule précédente reste valide dans ce cas où $A = \{i\}$ et $k = |A| = 1$.

8. Soit $i, k \in \{1, \dots, n\}$. On a l'union disjointe suivante :

$$\begin{aligned} \{|O_i| = k\} &= \bigcup_{A \subset \{1,\dots,n\} : |A| = k, i \in A} \{O_i = A\}, \\ \text{et donc } \mathbb{P}_n(|O_i| = k) &= \sum_{A \subset \{1,\dots,n\} : |A| = k, i \in A} \mathbb{P}_n(O_i = A) \\ &= \sum_{B \subset \{1,\dots,n\}\backslash\{i\} : |B| = k-1} \mathbb{P}_n(O_i = \{i\} \cup B). \end{aligned}$$

Cette somme comporte $\binom{n-1}{k-1}$ termes, tous égaux d'après la question précédente, et

$$\mathbb{P}_n(|O_i| = k) = \binom{n-1}{k-1} \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

9. Soit $i \in \{1,\dots,n\}$. Par le théorème de transfert,

$$\mathbb{E}_n\left(\frac{1}{|O_i|}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\mathbb{P}_n(|O_i| = k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{H_n}{n},$$
$$\mathbb{E}_n\left(\frac{1}{|O_i|^2}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}\mathbb{P}_n(|O_i| = k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{S_n}{n},$$
$$\mathrm{Var}_n\left(\frac{1}{|O_i|}\right) = \mathbb{E}_n\left(\frac{1}{|O_i|^2}\right) - \left(\mathbb{E}_n\left(\frac{1}{|O_i|}\right)\right)^2 = \frac{S_n}{n} - \left(\frac{H_n}{n}\right)^2.$$

10. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Notons $\mathcal{O}(\sigma)$ l'ensemble des orbites de σ. On a donc $M(\sigma) = |\mathcal{O}(\sigma)|$, et comme les orbites de σ forment une partition de $\{1,\dots,n\}$, on a

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{|O_i(\sigma)|} = \sum_{O\in\mathcal{O}(\sigma)}\sum_{i\in O}\frac{1}{|O_i(\sigma)|} = \sum_{O\in\mathcal{O}(\sigma)}\sum_{i\in O}\frac{1}{|O|} = \sum_{O\in\mathcal{O}(\sigma)} 1 = |\mathcal{O}(\sigma)| = M(\sigma).$$

11. On a donc

$$\mathbb{E}_n(M) = \mathbb{E}_n\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{|O_i|}\right) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}_n\left(\frac{1}{|O_i|}\right) = H_n.$$

On a lorsque k tend vers l'infini $\ln k - \ln(k-1) = -\ln(1-1/k) \sim \frac{1}{k}$. D'après le théorème sur les sommes partielles de séries divergentes à termes équivalents positifs, on a

$$\ln n = \sum_{k=2}^n (\ln k - \ln(k-1)) \sim \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = H_n.$$

III

12. On fait exactement comme dans la question 7.
13. On a la réunion disjointe

$$\{O_i \neq O_j,\ |O_i| = k,\ |O_j| = \ell\} = \bigcup_{\substack{A,B\subset\{1,\dots,n\}\backslash\{i,j\}:\\ |A|=k-1,\,|B|=\ell-1,\\ A\cap B=\varnothing}} \{O_i = A\cup\{i\},\ O_j = B\cup\{j\}\}$$
$$\mathbb{P}_n(O_i \neq O_j,\ |O_i| = k,\ |O_j| = \ell) = \sum_{\substack{A,B\subset\{1,\dots,n\}\backslash\{i,j\}:\\ |A|=k-1,\,|B|=\ell-1,\\ A\cap B=\varnothing}} \mathbb{P}_n(O_i = A\cup\{i\},\ O_j = B\cup\{j\})$$

Tous les termes de la somme sont égaux d'après la question précédente, et il faut donc compter le nombre de termes. Cela revient à compter les triplets ordonnés (A,B,C) réalisant une partition de $\{1,\dots,n\}\backslash\{i,j\}$ en trois ensembles A,B,C de cardinaux respectifs $k-1, \ell-1, n-(k+\ell)$. Si $k+\ell > n$, il n'y en a évidemment aucun. Si $k+\ell \leqslant n$, il y en a

$$\binom{n-2}{k-1,\ell-1,n-(k+\ell)} = \frac{(n-2)!}{(k-1)!(\ell-1)!(n-(k+\ell))!}$$

et donc $\mathbb{P}_n(O_i \neq O_j,\ |O_i| = k,\ |O_j| = \ell) = \dfrac{(n-2)!}{(k-1)!(\ell-1)!(n-(k+\ell))!}\dfrac{(k-1)!(\ell-1)!(n-(k+\ell))!}{n!}$

$$= \frac{1}{n(n-1)}.$$

14. On a la réunion disjointe

$$\begin{aligned}\{O_i = O_j,\ |O_i| = k\} &= \bigcup_{A\subset\{1,\dots,n\}\backslash\{i,j\},\ |A|=k-2} \{O_i = A\cup\{i,j\}\},\\ \text{et donc } \mathbb{P}_n(O_i = O_j,\ |O_i| = k) &= \sum_{A\subset\{1,\dots,n\}\backslash\{i,j\},\ |A|=k-2} \mathbb{P}_n(O_i = A\cup\{i,j\}).\end{aligned}$$

Avec la question 7, on a

$$\mathbb{P}_n(O_i = O_j,\ |O_i| = k) = \binom{n-2}{k-2}\frac{(k-1)!(n-k)!}{n!} = \frac{k-1}{n(n-1)}.$$

15. On découpe en deux morceaux et on utilise les deux questions précédentes :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_n(|O_i| = k,\ |O_j| = k) &= \mathbb{P}_n(O_i \neq O_j,\ |O_i| = k,\ |O_j| = \ell) + \mathbb{P}_n(O_i = O_j,\ |O_i| = k)\\ &= \frac{\mathbb{1}_{\{2k\leqslant n\}}}{n(n-1)} + \frac{k-1}{n(n-1)} = \frac{(k-1)+\mathbb{1}_{\{2k\leqslant n\}}}{n(n-1)}.\end{aligned}$$

16. Soit i et j deux éléments distincts de $\{1,\dots,n\}$. Avec le théorème de transfert, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_n\left(\frac{1}{O_i}\frac{1}{O_j}\right) &= \sum_{k=1}^n\sum_{\ell=1}^n \frac{1}{k}\frac{1}{\ell}\mathbb{P}_n(|O_i = k|, |O_j| = \ell)\\ &= \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ 1\leqslant \ell\leqslant n\\ k\neq\ell}} \frac{1}{k}\frac{1}{\ell}\frac{\mathbb{1}_{\{k+\ell\leqslant n\}}}{n(n-1)} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}\frac{(k-1)+\mathbb{1}_{\{2k\leqslant n\}}}{n(n-1)}\\ &= \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ 1\leqslant \ell\leqslant n\\ k+\ell\leqslant n}} \frac{1}{k}\frac{1}{\ell}\frac{1}{n(n-1)} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}\frac{k-1}{n(n-1)}\\ &= \frac{1}{n(n-1)}(V_n + H_n - S_n),\ \text{avec } V_n = \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ 1\leqslant \ell\leqslant n\\ k+\ell\leqslant n}} \frac{1}{k}\frac{1}{\ell},\\ \text{puis } \operatorname{Cov}_n\left(\frac{1}{O_i},\frac{1}{O_j}\right) &= \mathbb{E}_n\left(\frac{1}{O_i}\frac{1}{O_j}\right) - \mathbb{E}_n\left(\frac{1}{O_i}\right)\mathbb{E}_n\left(\frac{1}{O_j}\right)\\ &= \frac{1}{n(n-1)}(V_n + H_n - S_n) - \frac{H_n^2}{n^2}.\end{aligned}$$

17. Finalement par bilinéarité de la covariance, on a

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}_n(M) &= n\operatorname{Var}_n\left(\frac{1}{O_1}\right) + n(n-1)\operatorname{Cov}_n\left(\frac{1}{O_1},\frac{1}{O_2}\right)\\ &= S_n - \frac{H_n^2}{n} + V_n + H_n - S_n - \frac{n-1}{n}H_n^2\\ &= V_n + H_n - H_n^2 = H_n - \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ 1\leqslant \ell\leqslant n\\ k+\ell> n}} \frac{1}{k}\frac{1}{\ell} \leqslant H_n.\end{aligned}$$

IV

18. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\mathbb{E}_n(M) = H_n$, on a, avec l'inégalité de Tchebitchev,
$$\mathbb{P}_n\left(\left|\frac{M}{H_n} - 1\right| > \varepsilon\right) = \mathbb{P}_n\left(|M - \mathbb{E}(M)| > \varepsilon H_n\right) \leqslant \frac{\mathrm{Var}_n(M)}{\varepsilon^2 H_n^2} \leqslant \frac{H_n}{\varepsilon^2 H_n^2} = \frac{1}{\varepsilon^2 H_n}$$
qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

19. Soit $\varepsilon > 0$. On a
$$\begin{aligned}\mathbb{P}_n\left(\left|\frac{M}{\ln n} - 1\right| > \varepsilon\right) &= \mathbb{P}_n\left(\left|\frac{M}{H_n} - \frac{\ln n}{H_n}\right| > \varepsilon\frac{\ln n}{H_n}\right)\\ &\leqslant \mathbb{P}_n\left(\left|\frac{M}{H_n} - 1\right| + \left|1 - \frac{\ln n}{H_n}\right| > \varepsilon\frac{\ln n}{H_n}\right).\end{aligned}$$
Choisissons n_0 tel que $|1 - \frac{\ln n}{H_n}| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ pour $n \geqslant n_0$. Pour $n \geqslant n_0$, on a alors
$$\begin{aligned}\mathbb{P}_n\left(\left|\frac{M}{\ln n} - 1\right| > \varepsilon\right) &\leqslant \mathbb{P}_n\left(\left|\frac{M}{H_n} - 1\right| > \varepsilon\frac{\ln n}{H_n} - \left|1 - \frac{\ln n}{H_n}\right|\right)\\ &\leqslant \mathbb{P}_n\left(\left|\frac{M}{H_n} - 1\right| > \varepsilon\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \mathbb{P}_n\left(\left|\frac{M}{H_n} - 1\right| > \frac{\varepsilon(1-\varepsilon)}{2}\right),\end{aligned}$$
qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini si $0 < \varepsilon < 1$ d'après la question précédente. Le résultat reste vrai pour tout $\varepsilon > 0$, puisque $\varepsilon \mapsto \mathbb{P}_n\left(\left|\frac{M}{\ln n} - 1\right| > \varepsilon\right)$ est décroissante.

Compléments

1. Si on note d_n le nombre de permutations de $\mathfrak{S}_n$ sans point fixe, on peut démontrer assez simplement que $\mathbb{P}_n(N = k) = \binom{n}{k} d_{n-k}$. On montrera au chapitre 6 que $d_n \sim \frac{1}{e}\frac{1}{n!}$, d'où on peut déduire que
$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}_n(N = k) = e^{-1}\frac{1}{k!} = \mathbb{P}(X = k),$$
si X est une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre 1. On pourra dire alors (second semestre) que le nombre de points fixes d'une permutation aléatoire uniforme de $\{1, \dots, n\}$ converge en loi vers la loi de Poisson de paramètre 1.

2. Si on souhaite calculer la variance de M, on peut procéder comme suit : on a simplement pour $n \geqslant 1$,
$$V_n - V_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i}\frac{1}{n-i} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{i} + \frac{1}{n-i}\right) = \frac{1}{n} 2H_{n-1},$$
$$\begin{aligned}H_n^2 &= \sum_{k=1}^{n} H_k^2 - H_{k-1}^2 = \sum_{k=1}^{n} (H_k - H_{k-1})(H_k + H_{k-1})\\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}(2H_{k-1} + \frac{1}{k}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2H_{k-1}}{k} + \sum_{k=1}^{n} + \frac{1}{k^2}\\ &= \sum_{k=1}^{n} (V_k - V_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = V_n + S_n\end{aligned}$$
et donc $V_n = H_n^2 - S_n$, puis $\mathrm{Var}_n(M) = H_n + V_n - H_n^2 = H_n + (H_n^2 - S_n) - H_n^2 = H_n - S_n$.

3. La méthode utilisée pour calculer la variance de M n'est pas la plus rapide. Dans l'exercice 292 de Garet–Kurtzmann (*De l'intégration aux probabilités*), on montre qu'il est possible de construire une variable aléatoire ayant la même loi que M et qui s'écrit comme somme de variables de Bernoulli indépendantes. Cela permet un calcul très simple de la variance, et donne également l'expression des valeurs de $\mathbb{P}_n(M = k)$ à l'aide des nombres de Stirling de première espèce.