DEVOIR 2

DIPLOME : Licence de Mathématiques	Durée du sujet : 3H
UE : Intégration et Probabilités	Nom du rédacteur : O. GARET
Semestre : 5	
Epreuve de :	■ 1 recto-verso autorisé
Session 1	☐ Documents non autorisés
Date : 15 décembre 2021	☐ Calculatrices autorisées
Horaire : 13H30–16H30	■ Calculatrice non autorisée

Le sujet est composé d'un exercice et de deux problèmes indépendants (le premier problème étant plus long que le second).

Barème indicatif : exercice : 3 points, problème 1 : 15 points, problème 2 : 8 points.

On pourra utiliser sans démonstration que l'aire d'un disque de rayon R dans le plan euclidien vaut πR^2.

*** Exercice ***

Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur le segment $[0, 10]$. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(x \mapsto \frac{x^3}{3} + \frac{Ux^2}{2} + (3-U)x + 1 \text{ injective sur } \mathbb{R}\right) = \frac{1}{5}.$$

Indication : on pourra utiliser sans démonstration qu' ~~une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ est injective si et seulement si sa dérivée ne s'annule pas.~~ une fonction polynôme de degré 3 est injective sur $\mathbb{R}$ si et seulement si sa dérivée s'annule au plus une fois. [1] (Vous pourrez faire la preuve chez vous.)

*** Problème I ***

1. Montrer que pour tout $t \geq 0$, on a $0 \leq 1 - \cos t \leq \min(\frac{t^2}{2}, 2)$, puis que pour tout $t > 0$, on a $0 \leq \frac{1-\cos t}{t} \leq 1$.
2. Montrer que pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{1-\cos t}{t} e^{-xt}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ par rapport à la mesure de Lebesgue. On pose alors

$$\forall x > 0 \quad F(x) = \int_{]0,+\infty[} \frac{1-\cos t}{t} e^{-xt}\, d\lambda(t).$$

1. Énoncé corrigé au début de l'épreuve.

3. Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$, avec $F'(x) = \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x}$.
   Indication : on pourra commencer par prendre $x \in]a,+\infty[$, où on a choisi un réel $a > 0$ quelconque.
4. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} F(n) = 0$. En déduire que
$$\forall x > 0 \quad F(x) = \frac{1}{2}\log(1+x^{-2}).$$
5. On pose pour $x > 0$:
$$G(x) = \int_{]0,+\infty[} \frac{1-\cos t}{t^2} e^{-xt}\ d\lambda(t).$$
   Vérifier que G est bien définie, puis montrer que G est dérivable sur $]0,+\infty[$, avec $G' = -F$.
6. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que
$$\forall x > 0 \quad G(x) = C - \frac{x}{2}\log(1+x^{-2}) - \operatorname{atan} x.$$
7. Déterminer la valeur de C (Indication : on pourra calculer de deux manières différentes la limite de G en $+\infty$).
8. Montrer que
$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\ dt = \frac{\pi}{2}.$$
   (On commencera par montrer que l'intégrale converge.)

*** Problème II ***

On note H la demi-boule d'équation
$$H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times[0,+\infty[\quad x^2+y^2+z^2 \le 1\},$$
et pour $z \in \mathbb{R}$, on note H_z la coupe horizontale :
$$H_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; (x,y,z) \in H\}$$
et enfin, pour $h \in \mathbb{R}$,
$$D_h\{(x,y,z) \in H; z \le h\}.$$

1. Montrer que $\lambda^3(H) = \frac{2}{3}\pi$.
2. Soit (X,Y,Z) un vecteur aléatoire suivant la loi uniforme sur H. Donner la densité de ce vecteur.
3. On remarque que $\{Z \le h\} = \{(X,Y,Z) \in D_h\}$. En déduire que pour $h \in [0,1]$, $\mathbb{P}(Z \le h) = \frac{3}{2}h - \frac{h^3}{2}$.
4. Montrer que Z est une variable aléatoire réelle dont on précisera la densité.
5. Soit (X',Y',Z') un vecteur aléatoire ayant la même loi que (X,Y,Z) et indépendant de (X,Y,Z).
   (a) Calculer la fonction de répartition de $M = \max(Z,Z')$. En déduire que M suit une loi à densité que l'on déterminera.
   (b) Calculer la probabilité que le segment reliant (X,Y,Z) à (X',Y',Z') coupe le plan d'équation $z = \frac{1}{2}$.

FIN