Intégration et Probabilités

Examen du 2 décembre 2010

durée 2h

Les documents et calculatrices sont interdits.

***

On note Γ la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par la relation

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\ dt.$$

Pour n entier naturel non nul, on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

I

1. Vérifier que Γ est bien définie.
2. Démontrer que la fonction Γ est dérivable sur $]0,+\infty[$, avec

$$\forall x > 0 \quad \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \log t\ t^{x-1}\, dt.$$

II

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = H_n - \log n$ admet une limite lorsque n tend vers l'infini. On notera γ cette limite.
   Indication : on pourra étudier la nature de la série de terme général $u_n - u_{n-1}$.
2. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $H_n = \int_0^1 \frac{1-(1-v)^n}{v}\ dv$. À cet effet, on pourra calculer la somme

$$1 + (1-v) + \cdots + (1-v)^{n-1}.$$

3. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$\frac{H_{n+1}}{n+1} = -\int_0^1 \log v\ (1-v)^n dv.$$

4. Établir que pour tout $t \geq 0$, $1 - t \leq e^{-t}$.

5. On pose $I_n = \int_0^n (1 - \frac{t}{n})^n \log t \; dt$. Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t} \log t \; dt.$$

6. Montrer que $\gamma = -\Gamma'(1)$.
   Indication : on pourra montrer que $I_n = \frac{n}{n+1}(\log n - H_{n+1})$

FIN