



DEVOIR 1

DIPLOME : Licence de Mathématiques UE : Intégration et Probabilités Semestre : 5 Epreuve de : Session 1	Durée du sujet : 2H Nom du rédacteur : O. GARET
Date : 13 novembre 2025 Horaire : 09H00–11H00	☒ 1 recto A4 autorisé ☒ Autres documents non autorisés ☐ Calculatrices autorisées ☒ Calculatrice non autorisée

Barème approximatif : exercice 1 : 6 points ; exercice 2 : 9 points ;
exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 13 points

Exercice 1 1. Posons, pour $n \geq 1$ et x réel strictement positif :
 $f_n(x) = \frac{\sin(x/n)}{x/n} e^{-x}$. Justifier soigneusement l'intégrabilité de f_n sur
 $]0, +\infty[$ par rapport à la mesure de Lebesgue.

2. Montrer que $\int_{]0, +\infty[} \frac{\sin(x/n)}{x/n} e^{-x} d\lambda(x)$ admet une limite lorsque n
tend vers l'infini et déterminer cette limite.

Exercice 2 Pour $s > 1$, on pose $\zeta(s) = \sum_{k \geq 1} k^{-s}$ (c'est la fonction ζ de
Riemann). On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ suit la loi
Zêta de paramètre s si pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{\zeta(s)} \frac{1}{n^s}.$$

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi
Zêta de paramètre s .

Pour n entier naturel non nul, on pose $d(n) = \sum_{d|n} 1$; autrement dit
 $d(n)$ est le nombre de diviseurs de n parmi les entiers naturels.

On pose $Z = XY$.

1. Pour n entier naturel non nul, montrer que $\mathbb{P}(n \text{ divise } X) = n^{-s}$.
2. Montrer que $\mathbb{P}(n^2 \text{ divise } Z) \geq n^{-2s}$.
3. Montrer que pour tout entier naturel n , on a $\mathbb{P}(Z = n) = \frac{1}{\zeta(s)^2} \frac{d(n)}{n^s}$.
4. En déduire une expression de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d(n)}{n^s}$$

à l'aide de la fonction ζ de Riemann.

5. ♠ On note $(p_n)_{n \geq 1}$ la suite des nombres premiers. Calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(p_n \text{ divise } X | p_n^2 \text{ divise } Z).$$

Exercice 3 Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. On pose $\mathcal{A} = \sigma(\{\{1, 2, 3\}, \{3, 6\}, \{1, 4\}\})$ et $\mathcal{B} = \sigma(\{\{4, 5, 6\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{2, 5\}\})$, où $\sigma(\mathcal{C})$ désigne la plus petite tribu sur Ω contenant $\mathcal{C}$.

Montrer que $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

Exercice 4 Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite bornée de réels. Pour tout entier naturel non nul n , on pose $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ et $m_n = \frac{S_n}{n}$.

On définit enfin $\ell(u) = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et $m(u) = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} m_n$.

1. Montrer $S_n = O(n)$.
2. Calculer $m(u)$ et $\ell(u)$ dans le cas où $u_n = (-1)^n$.
3. On revient au cas général. Pour $\varepsilon > 0$, justifier l'existence d'un entier N_ε tel que pour $n \geq N_\varepsilon$, on a $u_n \leq \ell(u) + \varepsilon$.
4. En déduire $m(u) \leq \ell(u) + \varepsilon$ (on pourra commencer par majorer m_n pour n suffisamment grand).
5. Montrer enfin que $m(u) \leq \ell(u)$. L'inégalité peut-elle être stricte ?
6. Montrer que si (u_n) converge, alors $m(u) = \ell(u)$.
7. La réciproque est-elle vraie ? (Indication : prendre $u_n = 1 - \mathbb{1}_{\mathbb{N}}(\sqrt{n})$).
8. ♠ Dans cette dernière question, (u_n) n'est plus supposée bornée. Les définitions de (m_n) , (S_n) , $m(u)$ et $\ell(u)$ demeurent inchangées.
 - (a) Est-il encore vrai que $m(u) \leq \ell(u)$? (répondre brièvement)
 - (b) Construire un exemple où $m(u) = -\infty$ et $\ell(u) = +\infty$.

FIN

Statistiques

81 étudiants ont composé, il n'y a eu aucune copie blanche. Le sujet, un peu long, mais sans difficulté particulière, était noté sur 32 points (34,75 points en 2024, 31 en 2023). Les notes brutes s'étendent de 0,4 à 29,15 (20,35 en 2024, 23,5 en 2023) avec une médiane à 12,25 (8 en 2024, 9 en 2023), un premier quartile à 19,4 (11 en 2024, 13 en 2023) et un troisième quartile à 6,95 (5 en 2024, 5,7 en 2023).

Le sujet étant un peu plus facile que d'habitude (4 points sur les tribus contre 15 en 2024 ; les deux questions plus difficiles étaient identifiées par un symbole ♠ dans l'énoncé), les notes ont été élevées à la puissance 0,94 ; cela amène aux statistiques finales suivantes : maximum à 24, médiane à 10,5 , premier quartile à 16,25, quatrième quartile à 6.

Cette année est la première année du magistère ; l'impact sur la médiane est sensible (+1,5), et surtout sur le premier quartile (+3,25). Notons toutefois que deux étudiantes hors-magistère se classent dans les vingt premiers (note $\geq 16,5$).

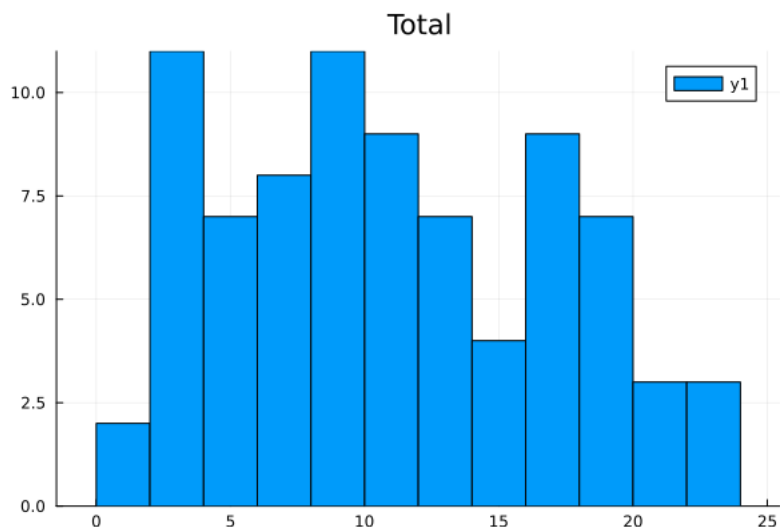


FIGURE 1 – Répartition des notes au partiel

Comme les deux années précédentes, la note finale a été obtenue en arrondissant les notes au demi-entier le plus proche, puis en montant à 5 toutes les notes inférieures. La décision, mûrement réfléchie, est motivée par le fait que ce premier contrôle, en cours d'apprentissage, se fait alors que le travail de maturation des thèmes, difficiles, du cours, n'est pas encore fait pour tous les élèves. L'écrtage par le bas des notes évite de plomber trop lourdement la moyenne, et évite que l'étudiant qui n'est pas encore en réussite pose de manière prématurée un diagnostic négatif décourageant sur son potentiel. Les six notes menant à un arrondi dépassant 20 (24 ; 23,5 (deux fois), 21,5 et 21) ont été ramenées à 20. Cette situation, après le partiel, est plutôt encourageante ; et il est très vraisemblable qu'un travail régulier, avec une attention particulière portée à la précision des arguments, permettra à celles et ceux qui sont en position difficile de passer au-dessus de la moyenne. Un travail régulier devrait également possible aux quelques élèves légèrement au-dessus de la moyenne d'obtenir des résultats compa-

rables au groupe de tête.

Le seul point noir, mais il n'est pas négligeable, concerne la rédaction, qui est trop souvent défailante, même dans des copies ayant pu faire valoir par ailleurs une aisance mathématique solide. La lecture des annales est vivement conseillée.

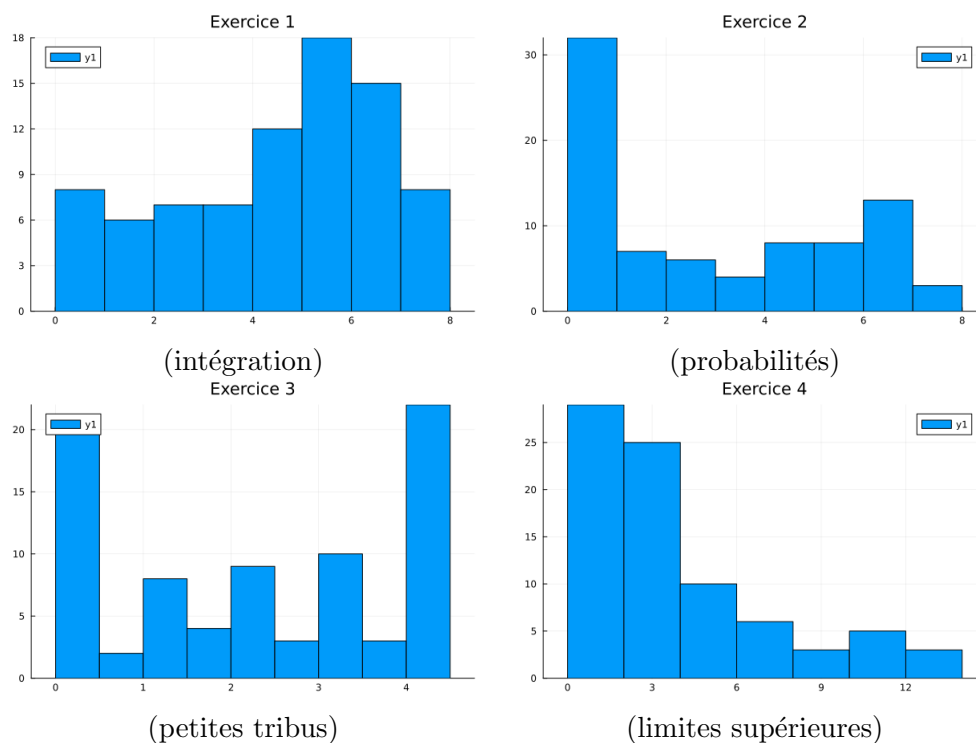


FIGURE 2 – Répartition des notes sur chaque exercice

Solution

Solution 1 1. La fonction f_n est continue sur $]0, +\infty[$ donc mesurable (par rapport à la tribu borélienne). **1 point** .

— Solution 1

Pour montrer son intégrabilité, il suffit donc de la majorer en valeur absolue par une fonction intégrable sur $]0, +\infty[$. Or, d'après l'inégalité des accroissements finis, on a $|\sin y| \leq |y|$ pour tout y réel, pour tout $x > 0$, donc

$$\forall n \geq 1 \quad \forall x > 0 \quad |f_n(x)| \leq e^{-x}.$$

Or, on sait que $\int_{]0, +\infty[} e^{-x} d\lambda(x) = 1$ (vu en cours), ce qui donne le résultat voulu.

— Solution 2

Comme f_n est continue sur $]0, +\infty[$, f_n est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue si et seulement si l'intégrale impropre

$$\int_0^{+\infty} |f_n(x)| dx$$

converge. En 0, l'intégrale est faussement impropre, car f_n se prolonge par continuité en 0 : $\sin(x/n) \sim x/n$ et $e^{-x} \sim 1$, donc

$f_n(x) \sim 1$. En l'infini, on a $\frac{\sin(x/n)}{x/n} e^{-x} = o(e^{-x})$, or $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ converge, ce qui achève de démontrer la convergence.

2 points

2. D'après l'inégalité des accroissements finis, on a $|\sin y| \leq |y|$ pour

tout y réel. Par ailleurs $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. On en déduit que

— $\forall n \geq 1 \forall x > 0 \quad |f_n(x)| \leq e^{-x} = g(x)$; 1 point

— $\forall x > 0 \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = e^{-x}$; 1 point

— $\int_{\mathbb{R}_+} e^{-x} d\lambda(x) = 1 < +\infty$. 1 point

Ainsi, les hypothèses du théorème de convergence dominée sont

vérifiées, et on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}_+} f_n(x) d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-x} d\lambda(x) = 1$.

1 point

On a souvent vu l'affirmation suivante :

L'intégrale $\int_{[0, +\infty[} e^{-x} d\lambda(x)$ coïncide avec l'intégrale de Riemann $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$.

Sans être gravissime, cette affirmation n'est pas correcte (la deuxième quantité n'est pas une intégrale de Riemann, c'est une intégrale impropre, qui coïncide avec l'intégrale de Lebesgue sous certaines hypothèses). À l'origine de cette confusion, il y a vraisemblablement la multiplicité des variantes des théories de base de l'intégration qui sont ou ont été enseignées dans les deux premières années du cycle post-bac.

L'intégrale de Riemann est une manière de définir rigoureusement l'aire sous la courbe d'une fonction. Elle repose sur l'idée intuitive d'approcher cette aire à l'aide de sommes d'aires de rectangles, puis de passer à la limite lorsque l'approximation devient de plus en plus fine.

On souhaite donner un sens à

$$\int_a^b f(x) dx,$$

c'est-à-dire l'aire sous le graphe de f entre a et b .

Riemann propose d'approcher cette aire par une somme de rectangles dont la base découpe l'intervalle $[a, b]$ et dont la hauteur est déterminée par les valeurs de f .

On considère une division de $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Pour chaque intervalle $[x_{i-1}, x_i]$, on choisit un point $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ et l'on forme la somme :

$$S(\mathcal{D}, (c)) = \sum_{i=1}^n f(c_i) (x_i - x_{i-1}).$$

La *norme* de la division est définie par

$$\|\mathcal{D}\| = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1}).$$

Cette somme est la « somme de Riemann ».

On dit que *l'intégrale de Riemann de f sur $[a, b]$* existe si, lorsque la norme de la division tend vers 0,

$$S(\mathcal{D}, (c)) \longrightarrow L,$$

et cela indépendamment des choix de $\mathcal{D}$ et des c_i . Cette limite, lorsqu'elle existe, est notée :

$$\int_a^b f(x) dx.$$

La définition est simple, mais du point de vue pédagogique, les terminologies fluctuent, car la détermination exacte de la classe des fonctions Riemann-intégrables n'est pas simple, et les enseignants se restreignent à des classes de fonction moins larges.

Par exemple, avec le théorème de Heine, il est facile de démontrer que les fonctions continues sur un compact sont intégrables : d'ailleurs, cette intégrale, l'intégrale restreinte aux fonctions continues porte un nom : c'est l'intégrale de Cauchy.

Toutefois, cette désignation n'est pas utilisée par tous les enseignants, et pendant longtemps (disons jusqu'à la fin du XXe siècle), le programme des classes préparatoires et celui de nombreuses universités met en avant une classe de fonctions plus large : la classe des fonctions réglées, c'est à dire les limites uniformes de fonction étagées. Et on parle toujours d'intégrale de Riemann, même s'il ne s'agit que d'un cas particulier.

À la suite, on introduit alors la notion d'intégrale impropre. Par exemple $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ est la limite (si elle existe) de

$$\int_0^M f(x) dx \text{ quand } M \rightarrow +\infty.$$

Dans ce cas, on parle d'une intégrale impropre convergente. Par exemple

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$$

est une intégrale impropre convergente. Comme

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_0^M \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx = +\infty,$$

l'intégrale $\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx$ est dite divergente et on précise que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$ est semi-convergente.

On utilise alors souvent l'expression « intégrale généralisée » comme synonyme d'intégrale impropre.

Cependant, à la fin du XX^{ème} siècle, suite à la fin du baccalauréat C en 1995, les CPGE (et le programme de l'agrégation interne) abandonnent (au moins officiellement) les intégrales impropres et les intégrales semi-convergentes. Elles parlent alors d'intégrale généralisée pour désigner un autre objet (qui n'est pas construit dans les classes), qui est la restriction de l'intégrale de Lebesgue à la classe des fonctions continues par morceaux.

En résumé, bien que dans de nombreux cas, l'intégrale de Riemann et l'intégrale de Riemann coïncident (et c'est heureux), ce sont deux objets distincts

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

est une intégrale impropre, pas une intégrale de Riemann car la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ n'est pas bornée.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$$

est une intégrale impropre, pas une intégrale de Riemann car l'intervalle $[0, +\infty[$ n'est pas compact.

- La fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est pas Riemann-intégrable sur $[0, 1]$, car pour une même subdivision $\mathcal{D}$, on peut choisir des points (c) avec $S(\mathcal{D}, (c)) = 0$ ou $S(\mathcal{D}, (c)) = 1$. Pourtant, cette même fonction est intégrable sur $[0, 1]$ par rapport à la mesure de Lebesgue (et l'intégrale est nulle).

Solution 2 1. Fixons $n \geq 1$. L'événement $\{n \text{ divise } X\}$ est l'union disjointe des événements $\{X = kn\}$ pour $k \geq 1$. Donc

$$\mathbb{P}(n \text{ divise } X) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(X = kn) = \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{(kn)^s} = \frac{1}{\zeta(s)} \frac{1}{n^s} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^s} = \frac{1}{n^s}.$$

En effet la somme $\sum_{k \geq 1} k^{-s}$ vaut $\zeta(s)$, ce qui compense le facteur $1/\zeta(s)$. **1,5 point** Il est important de préciser que la réunion est disjointe. L'usage du symbole $\sqcup$ (qui n'est pas complètement standard), ne dispense pas de justifier (ou au moins de préciser pour les cas évidents) que la réunion est disjointe (comme pour les sommes directes dans les espaces vectoriels avec $\oplus$). Si on utilise ce symbole, il est bon de le redéfinir une fois.)

2. — Solution 1

Si n divise à la fois X et Y , alors n^2 divise $XY = Z$.

Ainsi $\{n \text{ divise } X, n \text{ divise } Y\} \subset \{n^2 \text{ divise } Z\}$

$$\mathbb{P}(n^2 \text{ divise } Z) \geq \mathbb{P}(n \text{ divise } X \text{ et } n \text{ divise } Y).$$

Par indépendance de X et Y , la probabilité à droite vaut

$$\mathbb{P}(n \text{ divise } X) \mathbb{P}(n \text{ divise } Y) = n^{-s} \cdot n^{-s} = n^{-2s}.$$

D'où l'inégalité souhaitée.

— Solution 2

Si n^2 divise X , alors n^2 divise $Z = XY$. Ainsi

$$\mathbb{P}(n^2 \text{ divise } X) \geq \mathbb{P}(n^2 \text{ divise } X) = (n^2)^{-s} = n^{-2s}.$$

1,5 point

3. Comme $Z = XY$ et que les valeurs prises par X sont des entiers naturels non nuls, l'événement $\{Z = n\}$ est la réunion disjointe des événements des événements $\{X = d, Y = n/d\}$, où d décrit l'ensemble des diviseurs de n . Pour chaque diviseur d de n , l'indépendance donne

$$\mathbb{P}(X = d, Y = n/d) = \mathbb{P}(X = d)\mathbb{P}(Y = n/d) = d^{-s}(n/d)^{-s} = n^{-s}.$$

Comme la réunion est disjointe, il vient

$$\mathbb{P}(X = n) = \sum_{d|n} \mathbb{P}(X = d, Y = n/d) = \sum_{d|n} n^{-s} = \frac{d(n)}{n^s}.$$

1,5 point

4. Les événements $(\{Z = n\})_{n \geq 1}$ forment une partition de l'espace. On en déduit que

$$1 = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(Z = n) = \frac{1}{\zeta(s)^2} \sum_{n \geq 1} \frac{d(n)}{n^s}.$$

D'où

$$\sum_{n \geq 1} \frac{d(n)}{n^s} = \zeta(s)^2.$$

Remarque culturelle : ceci correspond aussi à une propriété générale des séries de Dirichlet associées à des fonctions multiplicatives. En effet la fonction nombre de diviseurs est la convolée multiplicative de la fonction égale à 1 par elle même, donc la série de Dirichlet associée à d est le carré de la fonction associée à la fonction 1, c'est à dire le carré de ζ . 1,5 point

5. — Solution 1 (générée, pour l'essentiel, par Chat Gpt)

Fixons un premier p . Pour alléger les notations, posons $a = p^{-s}$.

Pour $k \geq 0$ on a

$$\mathbb{P}(v_p(X) \geq k) = p^{-ks} = a^k,$$

donc en particulier

$$\mathbb{P}(v_p(X) = 0) = 1 - a, \quad \mathbb{P}(v_p(X) = 1) = a - a^2, \quad \mathbb{P}(v_p(X) \geq 2) = a^2.$$

Ici $v_p(\cdot)$ désigne l'exposant de p dans la décomposition en facteurs premiers (aussi appelée valuation p -adique).

L'événement $\{p^2 \text{ divise } Z\}$ est $\{v_p(X) + v_p(Y) \geq 2\}$. Calculons sa probabilité : les configurations $(v_p(X), v_p(Y))$ ayant somme ≤ 1 sont $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$. Leur probabilité totale est

$$(1 - a)^2 + 2(1 - a)(a - a^2) = 1 - 3a^2 + 2a^3.$$

Donc

$$\mathbb{P}(p^2 \text{ divise } Z) = 1 - (1 - 3a^2 + 2a^3) = 3a^2 - 2a^3 = a^2(3 - 2a).$$

Maintenant calculons la probabilité conjointe $\mathbb{P}(p \text{ divise } X \text{ et } p^2 \text{ divise } Z)$. L'événement $\{p \text{ divise } X \text{ et } p^2 \text{ divise } Z\}$ se décompose en deux cas disjoints : $\{v_p(X) \geq 2\}$ et $\{v_p(X) = 1 \text{ et } v_p(Y) \geq 1\}$. Ainsi (indépendance)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(p \text{ divise } X \text{ et } p^2 \text{ divise } Z) &= \mathbb{P}(v_p(X) \geq 2) + \mathbb{P}(v_p(X) = 1) \mathbb{P}(v_p(Y) \geq 1) \\ &= a^2 + (a - a^2)a = 2a^2 - a^3 = a^2(2 - a). \end{aligned}$$

Par conséquent, la probabilité conditionnelle cherchée vaut

$$\mathbb{P}(p \text{ divise } X \mid p^2 \text{ divise } Z) = \frac{a^2(2 - a)}{a^2(3 - 2a)} = \frac{2 - a}{3 - 2a}.$$

Remplaçons $a = p^{-s}$ et faisons tendre p vers l'infini : puisque $s > 1$, $a = p^{-s} \rightarrow 0$ quand $p \rightarrow \infty$. On obtient

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \mathbb{P}(p \text{ divise } X \mid p^2 \text{ divise } Z) = \frac{2 - 0}{3 - 0} = \frac{2}{3}.$$

Ainsi, pour la suite des premiers p_n ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(p_n \text{ divise } X \mid p_n^2 \text{ divise } Z) = \frac{2}{3}.$$

— Solution 2

Posons $E = \{p^2 \text{ divise } Z\}$. On va utiliser la formule de Bayes :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(p \text{ divise } X \mid E) &= \frac{\mathbb{P}(p \text{ divise } X) \mathbb{P}(E \mid p \text{ divise } X)}{\mathbb{P}(E \mid p \text{ divise } X) \mathbb{P}(p \text{ divise } X) + \mathbb{P}(E \mid p \text{ divise pas } X) \mathbb{P}(p \text{ divise pas } X)}. \end{aligned}$$

On sait que

$$\mathbb{P}(p \text{ divise } X) = p^{-s} \text{ et } \mathbb{P}(p \text{ divise pas } X) = 1 - p^{-s}.$$

On a d'abord

$$\mathbb{P}(E \mid p \text{ divise pas } X) = \mathbb{P}(p^2 \text{ divise } Y \mid p \text{ divise pas } X) = \mathbb{P}(p^2 \text{ divise } Y) = p^{-2s},$$

où on a utilisé l'indépendance de X et Y . Ensuite, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E^c \mid p \text{ divise } X) &= \mathbb{P}(p^2 \text{ divise pas } X, p \text{ divise pas } Y \mid p \text{ divise } X) \\ &= \mathbb{P}(p^2 \text{ divise pas } X \mid p \text{ divise } X) \mathbb{P}(p \text{ divise pas } Y), \end{aligned}$$

où on a encore utilisé l'indépendance de X et Y .

Or $\mathbb{P}(p^2 \text{ divise } X | p \text{ divise } X) = \frac{p^{-2s}}{p^{-s}} = p^{-s}$, donc on obtient

$$\mathbb{P}(E^c | p \text{ divise } X) = (1 - p^{-s})^2 \text{ et } \mathbb{P}(E | p \text{ divise } X) = p^{-s}(2 - p^{-s}).$$

On a enfin

$$\mathbb{P}(p \text{ divise } X | E) = \frac{p^{-2s}(2 - p^{-s})}{p^{-2s}(2 - p^{-s}) + (1 - p^{-s})p^{-2s}} = \frac{2 - p^{-s}}{3 - 2p^{-s}}.$$

On conclut comme précédemment.

2 points

Solution 3 On pose

- $A_1 = \{1, 2, 3\}$, $A_2 = \{3, 6\}$, $A_3 = \{1, 4\}$;
- $B_1 = \{4, 5, 6\}$, $B_2 = \{1, 2, 4, 5\}$, $B_3 = \{2, 5\}$.
- Solution 1 :
 1. $A_1 = B_1^c$; $B_1 \in \mathcal{B}$; or une tribu est stable par passage au complémentaire, donc $A_1 \in \mathcal{B}$;
 2. $A_2 = B_2^c$; $B_2 \in \mathcal{B}$; or une tribu est stable par passage au complémentaire, donc $A_2 \in \mathcal{B}$;
 3. $A_3 = B_2 \setminus B_3$; B_2 et B_3 sont dans $\mathcal{B}$; or une tribu est stable par complémentation donc $A_3 \in \mathcal{B}$;
 4. A_1, A_2, A_3 sont dans $\mathcal{B}$, donc la tribu qu'ils engendrent ($\mathcal{A}$) est une sous-tribu de $\mathcal{B}$.
 5. Le même raisonnement que précédent sur le passage au complémentaire montre que B_1 et B_2 sont dans $\mathcal{A}$.
 6. $B_3 = B_2 \setminus A_3$; B_2 et A_3 sont dans $\mathcal{A}$; or une tribu est stable par complémentation donc $B_3 \in \mathcal{A}$;
 7. B_1, B_2, B_3 sont dans $\mathcal{A}$, donc la tribu qu'ils engendrent ($\mathcal{B}$) est une sous-tribu de $\mathcal{A}$.
 8. On a la double inclusion $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ et $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, donc $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

Il est nécessaire de rappeler les axiomes de stabilité qui sont utilisés pour justifier l'appartenance d'un ensemble à une tribu. L'argument de tribu engendrée (étape 4 et 7 dans la solution proposée) a aussi souvent été oublié. Si ces arguments manquent, le texte produit montre qu'une routine est acquise, mais pas les fondements mathématiques sous-jacents.

— Solution 2

On pose

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^3 2^{i-1} \mathbb{1}_{A_i}(x).$$

L'application ϕ est $(\Omega, \mathcal{A}) - (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable, comme combinaison linéaire d'applications $(\Omega, \mathcal{A}) - (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -mesurables. On a $\phi(1) = 5$, $\phi(2) = 1$, $\phi(3) = 3$, $\phi(4) = 4$, $\phi(5) = 0$, $\phi(6) = 2$. On remarque que ϕ est injective, donc pour tout i de Ω ,

$$\{i\} = \phi^{-1}(\{\phi(i)\}).$$

Or $\{\phi(i)\}$ est un borélien et l'application ϕ est $(\Omega, \mathcal{A}) - (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable, donc $\{i\} \in \mathcal{A}$. Finalement

$$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}\} \subset \mathcal{A}.$$

Or les singletons de Ω , qui est fini, engendrent la tribu de ses parties, donc $\mathcal{P}(\Omega) \subset \mathcal{A}$. Mais $\mathcal{A}$ est une sous-tribu de $\mathcal{P}(\Omega)$, donc finalement $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

De même, la fonction

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^3 2^{i-1} \mathbb{1}_{B_i}(x)$$

vérifie $\psi(1) = 2$, $\psi(2) = 6$, $\psi(3) = 0$, $\psi(4) = 3$, $\psi(5) = 6$, $\psi(6) = 1$: elle est injective et $(\Omega, \mathcal{B}) - (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable, ce qui conduit comme précédemment à $\mathcal{B} = \mathcal{P}(\Omega)$. On a donc bien $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

4 points

Un complément amusant : on choisit de manière indépendantes 3 ensembles A_1, A_2, A_3 , en suivant la loi uniforme sur $\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\})$. Quelle est la probabilité que $\sigma(A_1, A_2, A_3) = \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\})$? Même question avec des ensembles $A_1, \dots, A_k$ suivant la loi uniforme sur $\mathcal{P}(\{1, \dots, n\})$. On pourra commencer par remarquer que cette probabilité est nulle si $2^k < n$.

Solution 4 1. Comme (u_n) est bornée, il existe $M > 0$ tel que $|u_n| \leq M$ pour tout n . Alors pour tout n ,

$$|S_n| = \left| \sum_{k=1}^n u_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |u_k| \leq nM,$$

donc $S_n = O(n)$. 1 point De trop nombreuses copies ont cru pouvoir conclure en ayant seulement majoré S_n , alors qu'il faut contrôler la valeur absolue.)

2. Pour $u_n = (-1)^n$, on a $u_n \leq 1$ pour tout n ; donc $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq 1$.

Mais $u_{2n} = 1$ pour tout n , donc 1 est valeur d'adhérence de (u_n) ; or la limite supérieure est la plus grande valeur d'adhérence, donc

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.$$

Calculons S_n : si n est pair, $S_n = 0$; si n est impair, $S_n = -1$. Ainsi

$$m_n = \frac{S_n}{n} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair,} \\ -\frac{1}{n} & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases}$$

Dans tous les cas, $|m_n| \leq \frac{1}{n}$, donc $m_n \rightarrow 0$ et $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} m_n = 0$. On obtient

$$\ell(u) = 1, \quad m(u) = 0.$$

2 points

3. — Solution 1

Rappelons la définition de la limite supérieure : $\ell(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sup_{k \geq n} u_k)$.
Donc pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N_ε tel que pour tout $n \geq N_\varepsilon$,

$$\sup_{k \geq n} u_k \leq \ell(u) + \varepsilon.$$

En particulier, pour tout $k \geq n$ on a $u_k \leq \sup_{j \geq n} u_j \leq \ell(u) + \varepsilon$.

Ainsi bien : il existe N_ε tel que $u_n \leq \ell(u) + \varepsilon$ pour tout $n \geq N_\varepsilon$.

— Solution 2

On sait que la limite supérieure de u_n ($\ell(u)$) est la borne supérieure des valeurs dépassées une infinité de fois ; comme $\ell(u) < +\infty$, $\ell(u) + \varepsilon$ est strictement plus grand, donc $\ell(u) + \varepsilon$ n'est dépassé qu'un nombre fini de fois.

1 point

4. Soit $\varepsilon > 0$ et $N = N_\varepsilon$ comme ci-dessus. Pour $n \geq N$ on peut écrire

$$S_n = \sum_{k=1}^{N-1} u_k + \sum_{k=N}^n u_k.$$

La première somme est une constante (fixée), notons $C = \sum_{k=1}^{N-1} u_k$.
Pour la seconde, comme $u_k \leq \ell(u) + \varepsilon$ pour $k \geq N$, on a

$$\sum_{k=N}^n u_k \leq (n - N + 1)(\ell(u) + \varepsilon).$$

Donc pour $n \geq N$,

$$m_n = \frac{S_n}{n} \leq \frac{C}{n} + \frac{n - N + 1}{n}(\ell(u) + \varepsilon).$$

En faisant tendre $n \rightarrow \infty$ (ou en prenant $\overline{\lim}$ des deux membres) on obtient

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} m_n \leq \ell(u) + \varepsilon,$$

c'est-à-dire $m(u) \leq \ell(u) + \varepsilon$. 2 points

5. En passant à la limite $\varepsilon \downarrow 0$ dans l'inégalité $m(u) \leq \ell(u) + \varepsilon$, on obtient

$$m(u) \leq \ell(u).$$

L'inégalité peut être stricte : dans l'exemple de la question 2, on avait $m(u) = 0$ et $\ell(u) = 1$. 1 point

6. On a $m(u) \leq \ell(u)$, et de même, $m(-u) \leq \ell(-u)$, c'est à dire

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n -u_k \right) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} -u_n,$$

et en multipliant par -1 :

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n u_k \right) \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} u_n,$$

Mais, comme (u_n) converge, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell(u),$$

ce qui nous donne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n u_k \right) \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell(u) \geq m(u) = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n u_k \right),$$

Mais le membre de droite (limsup) est toujours plus grand que les termes intermédiaires (liminf), donc finalement tous les termes intermédiaires sont égaux, en particulier $\ell(u) = m(u)$.

En particulier, on retrouve le théorème de Cesaro.

Rappeler le théorème de Cesaro (avec ses hypothèses) est une autre manière (correcte) de répondre à la question. **1 point**

7. La réciproque est fautive : l'égalité $m = u$ ne garantit pas la convergence de (u_n) . L'indication proposée donne un exemple simple. Posons

$$u_n = 1 - \mathbb{1}_{\mathbb{N}}(\sqrt{n}) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est un carré parfait,} \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors la suite prend les valeurs 0 (sur les carrés) et 1 (ailleurs), elle ne converge pas car il y a une infinité de 0 et une infinité de 1. On a $\ell(u) = \overline{\lim} u_n = 1$, et donc $m(u) \leq 1$.

S_n est le nombre d'entiers entre 1 et n qui ne sont pas des carrés.

En particulier $S_{n^2} = n^2 - n$, d'où $m_{n^2} = \frac{n^2 - n}{n^2} = 1 - 1/n$, qui tend vers 1 quand $n \rightarrow +\infty$, d'où $m(u) \geq 1$. Finalement $m(u) = 1$.

Ainsi $m(u) = 1 = \ell(u)$ mais (u_n) ne converge pas. La réciproque est donc fautive. **2 points**

8. Maintenant on n'impose plus la bornitude de (u_n) .

(a) Oui, ou a encore $m(u) \leq \ell(u)$. Si $\ell(u) = +\infty$, l'inégalité est évidente, et sinon les preuves de 3,4,5 restent inchangées. **1 point**

(b) Construction d'un exemple avec $m = -\infty$ et $u = +\infty$.

— Solution 1 (inspirée de la question précédente)

Définissons la suite (u_n) par

$$u_n = \begin{cases} n^2 & \text{si } n \text{ est un carré parfait, i.e. } n = j^2 \text{ pour un } j \in \mathbb{N}, \\ -n^2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Vérification de $\ell(u) = +\infty$. Si $n_j = j^2$ alors $u_{n_j} = j^4 \rightarrow +\infty$ quand $j \rightarrow +\infty$. Donc $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$.

Vérification de $m(u) = -\infty$.

Je peux réécrire $u_n = 2n^2 \mathbb{1}_C(n) - n^2$, où C est l'ensemble des carrés.

On peut décomposer

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k = 2 \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_C(k) k^2 - \sum_{k=1}^n k^2$$

On a d'une part la majoration

$$\sum_{k=1}^n \mathbb{1}_C(k) k^2 \leq n^2 \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_C(k) \leq n^{2,5},$$

et d'autre part

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \geq \frac{n^3}{3}.$$

Finalement

$$m_n \leq 2n^{1,5} - \frac{n^2}{6} = n^{1,5} \left(2 - \frac{\sqrt{n}}{6} \right),$$

qui tend vers $-\infty$ quand n tend vers l'infini.

On a donc bien construit une suite telle que $\ell(u) = +\infty$ et $m(u) = -\infty$.

— Solution 2

Définissons la suite (u_n) par

$$u_n = \begin{cases} n+2 & \text{si } n \text{ est impair} \\ -2n & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

Vérification de $\ell(u) = +\infty$. Si $n_k = 2k+1$ alors $u_{n_k} = 2k+3 \rightarrow +\infty$ quand $k \rightarrow +\infty$. Donc $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$.

Vérification de $m(u) = -\infty$. On a

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} u_k = \sum_{k=1}^n (u_{2k-1} + u_{2k}) = \sum_{k=1}^n (2k+1-4k) = - \sum_{k=1}^n (2k-1) = -n^2.$$

Ainsi $m_{2n} = -\frac{n}{2}$, ce qui entraîne que $m(u) = -\infty$.

2 points