DEVOIR 1

DIPLOME : Licence de Mathématiques	Durée du sujet : 2H
UE : Intégration et Probabilités	Nom du rédacteur : O. GARET
Semestre : 5	
Epreuve de :	■ Seul document autorisé :1 recto A4 manuscrit
Session 1	☐ Documents autorisés
Date : 15 novembre 2024	☐ Calculatrices autorisées
Horaire : 09H00–11H00	■ Calculatrice non autorisée

Le sujet est composé de quatre parties indépendantes. Tout résultat nécessaire pourra être admis.

Barème indicatif, par partie : 13–9–5–5.

Le sujet est long, il n'est pas attendu que les candidats fassent tout, la qualité de l'argumentation est un élément important d'appréciation des copies.

*** Partie I : Autour d'un théorème de Dini ***

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

   Montrer que pour tout x réel $f_n(x) \to e^x$.

2. On suppose plus généralement que (f_n) est une suite de fonctions croissantes sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ avec

$$\forall x \in I : \quad f_n(x) \to f(x),$$

   où f est une fonction continue.
   Soit (x_n) une suite d'éléments de I, de limite $x \in I$.
   (a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe b et c dans I avec $b < x < c$ et

$$\forall y \in [b, c] \quad f(x) - \varepsilon < f(y) < f(x) + \varepsilon.$$

   (b) Justifier l'existence de n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$ on a $b \leqslant x_n \leqslant c$.
   (c) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} f_n(x_n) \leqslant f(x) + \varepsilon \quad \text{et} \quad \underline{\lim_{n\to+\infty}} f_n(x_n) \geqslant f(x) - \varepsilon.$$

   (d) Montrer enfin que $f_n(x_n) \to f(x)$.

3. En déduire la limite de $(1+\sin(\frac{1}{n}))^n$ lorsque n tend vers l'infini.
4. On pose $u_n = (1+\frac{\cos n}{n})^n$.
   (a) Montrer les inégalités
   $$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\ u_n \leq e \text{ et } \underline{\lim_{n\to+\infty}}\ u_n \geq \frac{1}{e}.$$
   (b) On admet que l'ensemble des valeurs d'adhérences de la suite $(\cos(n))_{n\geq 1}$ est l'ensemble $[-1,1]$ tout entier.
   Déterminer les valeurs de
   $$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\ u_n \text{ et } \underline{\lim_{n\to+\infty}}\ u_n.$$

*** Partie II : Le théorème fondamental de la mesurabilité ***

Soit f une application quelconque d'un ensemble Ω dans un ensemble Ω'. Pour toute tribu $\mathcal{T}$ sur Ω', on note $f^{-1}(\mathcal{T}) = \{f^{-1}(T) :\ T \in \mathcal{T}\}$.

1. Montrer que $f^{-1}(\mathcal{T})$ est une tribu sur Ω.
2. Soit $\mathcal{A}$ un élément de $\mathcal{P}(\Omega')$.
   (a) Montrer que
   $$\sigma(f^{-1}(\mathcal{A})) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{A})).$$
   (b) Notons
   $$\mathcal{C} = \{X \in \sigma(\mathcal{A}); f^{-1}(X) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{A}))\}.$$
   Montrer que $\mathcal{C}$ est une tribu qui contient $\mathcal{A}$.
   (c) Montrer enfin que $\sigma(f^{-1}(\mathcal{A})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{A}))$.

*** Partie II bis : petites tribus ***

On pose $\Omega = \{0,1,2,3,4,5\}$, et pour $k \geq 1$, $M_k = \Omega \cap k\mathbb{Z}$.

1. Montrer que $\{3\} \in \sigma(M_2, M_3)$.
2. On pose $\mathcal{S} = \{\{0\},\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\}\}$.
   Montrer que $\sigma(\mathcal{S}) = \mathcal{P}(\Omega)$.
3. On pose $A = \{0,1,2\}$. Montrer que $\sigma(M_2, M_3, A) = \mathcal{P}(\Omega)$.

*** Partie III : Probabilités ***

Pour p réel de $]0,1[$, on pose $q = 1-p$ et on considère une suite d'événements indépendants de même probabilité p. On note X le rang de la première réussite dans cette suite d'événements.

1. Donner la loi de X.
2. Soit $n \geq 1$. Montrer que la probabilité que n divise X vaut $\frac{p(1-p)^{n-1}}{1-(1-p)^n}$.
3. Exprimer en fonction de q la probabilité que 3 divise X sachant que X est pair (autrement dit $\mathbb{P}(3 \text{ divise X}|X \text{ pair})$).
   Pour $p = \frac{1}{2}$, on vérifiera que la probabilité cherchée vaut $\frac{1}{21}$.

FIN

Statistiques

36 étudiants ont composé, il n'y a eu aucune copie blanche. Le sujet, assez long, était noté sur 34,75 points (31 en 2023). Les notes brutes s'étendent de 0,5 à 20,35 (23,5 en 2023) avec une médiane à 8 (9 en 2023), un premier quartile à 11 (13 en 2023) et un troisième quartile à 5 (5,7 en 2023).

Le sujet étant plus difficile que d'habitude, les notes ont été multipliées par 1,125 ; cela amène à des statistiques proches de celles du partiel 2023 : maximum à 23, médiane à 9, premier quartile à 13, quatrième quartile à 5,5.

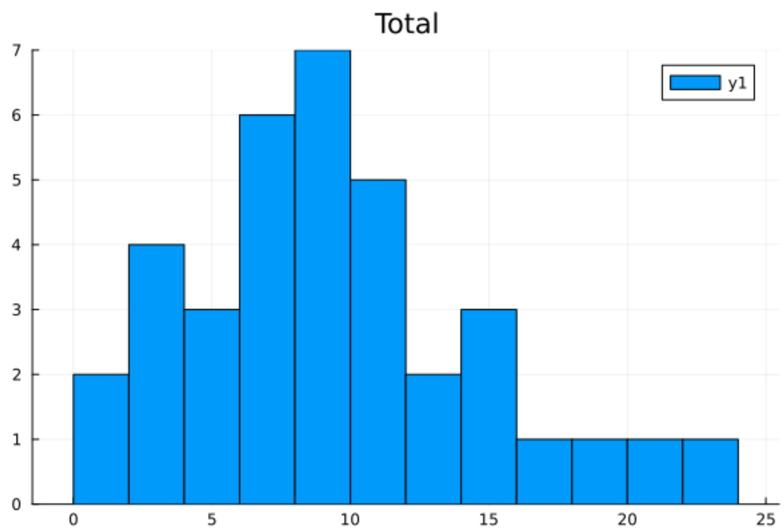
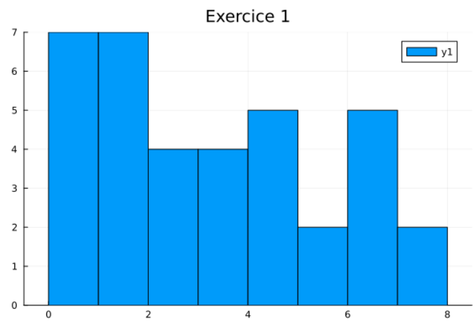
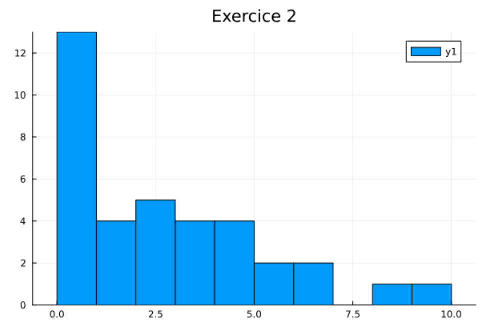


Figure 1 – Répartition des notes au partiel

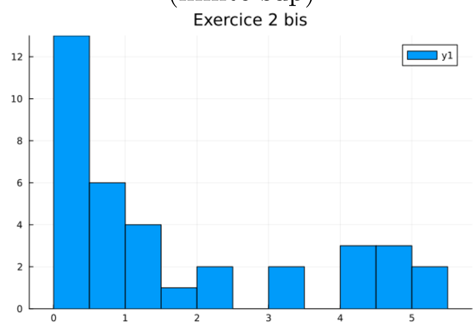
Comme les deux années précédentes, la note finale a été obtenue en arrondissant les notes au demi-entier le plus proche, puis en montant à 5 toutes les notes inférieures. La décision, mûrement réfléchie, est motivée par le fait que ce premier contrôle, en cours d'apprentissage, se fait alors que le travail de maturation des thèmes, difficiles, du cours, n'est pas encore fait pour tous les élèves. L'écrétage par le bas des notes évite de plomber trop lourdement la moyenne, et évite que l'étudiant qui n'est pas encore en réussite pose de manière prématurée un diagnostic négatif décourageant sur son potentiel. Les deux notes dépassant 20 (21,5 et 23) ont été ramenées à 20. Cette situation, après le partiel, n'est pas exceptionnelle ; et il est très vraisemblable qu'un travail régulier, avec une attention particulière portée à la précision des arguments, permettra à celles et ceux qui sont en position difficile, d'obtenir des résultats comparables au groupe de tête. La lecture des annales est vivement conseillée.



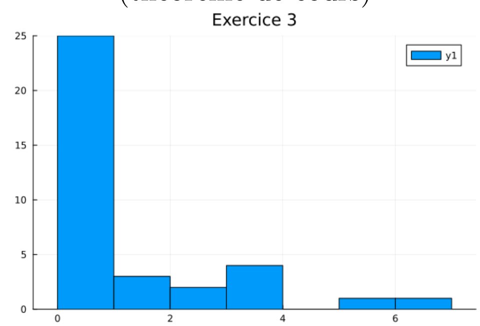
(limite sup)



(théorème de cours)



(petites tribus)



(probabilités)

FIGURE 2 – Répartition des notes sur chaque exercice

Partie I 13,25 points

1. Soit x réel quelconque Pour $n > |x|$ on a $f_n(x) > 0$ et on peut écrire $\log f_n(x) = n\log(1+\frac{x}{n})$. Comme x/n tend vers 0 quand n tend vers l'infini, on a $\log(1+\frac{x}{n}) = \frac{x}{n} + o(1/n)$, d'où $n\log(1+\frac{x}{n}) = x + o(1)$, ce qui veut dire que $n\log(1+\frac{x}{n})$ tend vers x quand n tend vers l'infini. Comme la fonction exponentielle est continue, on en déduit que $f_n(x) = \exp(n\log(1+x/n))$ tend vers e^x quand n tend vers l'infini. 2,25 points

   Seules trois copies ont donné explicitement l'argument final de continuité. Ce n'est pas normal. Comme chaque année, on a vu des raisonnements erronés faisant comme si des choses équivalentes étaient égales, composant des équivalents ou ce genre de choses. Le correcteur a trop d'années d'expérience pour raisonnablement promettre la damnation éternelle aux auteurs et autrices de ces erreurs, mais il faut définitivement les éliminer pour espérer progresser durablement en mathématiques. On peut se reporter aux corrigés des années précédentes pour un bestiaire des erreurs plus complet.

2. (a) C'est une conséquence immédiate de la continuité de f en x. Si on veut détailler davantage : f étant continue en x, on peut trouver α tel que pour tout y de I avec $|x-y| \leq \alpha$, on a $|f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$. Comme I est ouvert, quitte à remplacer α par un réel plus petit, on peut supposer que $B_F(x,\alpha) \subset I$, et alors il est clair que $b = x - \alpha$ et $c = x + \alpha$ conviennent.

   Beaucoup d'erreurs sur cette question. De nombreuses personnes choisissent b et c tels que $[b, c] \subset I$, puis affirment que les inégalités demandées sont vérifiés, ou prétendent pouvoir choisir ε.

À leur décharge, on peut reconnaître qu'il y avait une imprécision dans le sujet qui avait oublié de définir ε, mais la correction aurait dû être évidente – ou susciter une question aux surveillants d'épreuve.

1 point

(b) $]b, c[$ est un intervalle ouvert contenant x. Comme (x_n) tend vers x, à partir d'un certain rang, tous les termes sont dans $]b, c[$ (et donc dans $[b, c]$). 1 point

Taux de réussite :25% ! C'est insuffisant.

(c) Soient b et c tels que donnés par a). En appliquant, le b), on trouve un entier n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$ on a $b \leqslant x_n \leqslant c$. Comme f_n est croissante, on a pour $n \geq n_0$,

$$f_n(b) \leq f_n(x_n) \leq f_n(c).$$

En prenant la limite supérieure dans la deuxième inégalité, on obtient

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} f_n(x_n) \leq \overline{\lim_{n\to+\infty}} f_n(c) = f(c)$$

En appliquant maintenant a) à $y = c$, on obtient $f(c) \leq f(x) + \varepsilon$ et donc

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} f_n(x_n) \leq f(x) + \varepsilon$$

De même, en prenant la limite inférieure dans la première inégalité, on obtient

$$\underline{\lim_{n\to+\infty}} f_n(x_n) \geq \underline{\lim_{n\to+\infty}} f_n(b) = f(b)$$

En appliquant maintenant a) à $y = b$, on obtient $f(b) \geq f(x) - \varepsilon$ et donc

$$\underline{\lim_{n\to+\infty}} f_n(x_n) \geq f(x) - \varepsilon$$

2 points

Question à reprendre pour beaucoup de copies. On trouve parfois l'inégalité

$$\underline{\lim_{n\to+\infty}} f_n(x_n) \leq \lim_{n\to+\infty} f_n(x_n) \leq \overline{\lim_{n\to+\infty}} f_n(x_n)$$

Cette inégalité n'a pas de sens ou est inutile : la quantité $\lim_{n\to+\infty} f_n(x_n)$ n'existe que si les limites inférieure et supérieure coïncident.

(d) Ces inégalités sont vraies pour tout $\varepsilon > 0$. En faisant tendre ε vers 0 dans les inégalités, on récupère

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} f_n(x_n) \leqslant f(x) \quad \text{et} \quad \underline{\lim_{n\to+\infty}} f_n(x_n) \geqslant f(x).$$

Comme on a toujours $\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n(x_n)) \leq \overline{\lim}_{n\to+\infty} f_n(x_n))$, on récupère que les quantités $\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n(x_n))$ et $\overline{\lim}_{n\to+\infty} f_n(x_n))$ coïncident avec $f(x)$, ce qui montre que $f_n(x_n)$ tend vers $f(x)$ 2 points

3. On pose $x_n = n\sin(1/n)$. Comme $\sin(1/n) \sim 1/n$, x_n tend vers 1. En mettant ensemble les questions 1) et 2), on voit que $f_n(x_n)$ tend vers $f(1) = \exp(1) = e$. 1 point

4. (a) Pour $n \geq 1$, on a $0 \leq 1 - \frac{1}{n} \leq 1 - \frac{\cos n}{n} \leq 1 + \frac{1}{n}$, d'où en élevant à la puissance n : $0 \leq (1-1/n)^n \leq u_n \leq (1+1/n)$. De l'inégalité $(1-1/n)^n \leq u_n$ on déduit $\underline{\lim}_{n\to+\infty} (1-1/n)^n \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty} u_n$, de même de l'inégalité $(1+1/n)^n \geq u_n$ on déduit

$$\overline{\lim}_{n\to+\infty} (1+1/n)^n \leq \overline{\lim}_{n\to+\infty} u_n.$$

Comme les limites en l'infini de $(1-1/n)^n$ et $(1+1/n)^n$ sont respectivement $1/e$ et e, c'est la même chose pour leurs limites inférieures et supérieures respectives, d'où les inégalités voulues.2 points

(b) Soit x une valeur d'adhérence de $(\cos(n))$. Il existe une suite $(\phi(n))_{n\geq 1}$ d'entiers telle que $\cos(\phi(n))$ tend vers x quand n tend vers l'infini.

On pose

$$y_n = \begin{cases} \cos(n) & \text{si il existe } k \text{ tel que } n = \phi(k) \\ x & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par construction, (y_n) tend vers x quand n tend vers l'infini

En appliquant la question 2) à la suite (y_n), on voit que $(1 + \frac{y_n}{n})^n$ tend vers e^x.
Il en est de même de la sous-suite $((1 + \frac{y_{\phi(n)}}{\phi(n)})^{\phi(n)})_{n\geq 1}$. Or

$$\left(1 + \frac{y_{\phi(n)}}{\phi(n)}\right)^{\phi(n)} = \left(1 + \frac{\cos\phi(n)}{\phi(n)}\right)^{\phi(n)},$$

donc on vient de montrer que e^x est une valeur d'adhérence de la suite $(1 + \frac{\cos n}{n})^n$. En particulier $e = e^1$ est une valeur d'adhérence, et $\frac{1}{e} = e^{-1}$ est aussi une valeur d'adhérence. Or la plus grande valeur d'adhérence est la limite supérieure ; on sait qu'elle ne dépasse pas e ; comme e est une valeur d'adhérence, c'est e. De même, la plus petite valeur d'adhérence est la limite supérieure ; on sait qu'elle est plus grande que $1/e$; comme $1/e$ est une valeur d'adhérence, c'est $1/e$.2 points

Cette question difficile n'a été résolue correctement dans aucune copie.

Partie II 10 points

1. Vérifions que $f^{-1}(\mathcal{T})$ satisfait les axiomes d'une tribu.

   Cette phrase a souvent manqué dans les copies, où les vérifications étaient faites sans qu'on sache vraiment quels buts elles servaient.

   — $\varnothing \in f^{-1}(\mathcal{T})$ car $\varnothing = f^{-1}(\varnothing)$ et $\varnothing \in \mathcal{T}$.

   — Soit $A \in f^{-1}(\mathcal{T})$. Il existe $B \in \mathcal{T}$ avec $A = f^{-1}(B)$.
   On a alors $A^c = (f^{-1}(B))^c = f^{-1}(B^c)$. Comme $B^c \in \mathcal{T}$, on trouve donc $A^c \in f^{-1}(\mathcal{T})$.

   — Soit $(A_i)_{i\geq 1}$ une suite d'éléments de $f^{-1}(\mathcal{T})$.
   Pour tout i, il existe $B_i \in \mathcal{T}$ avec $A_i = f^{-1}(B_i)$. On a

   $$\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{+\infty} (f^{-1}(B_i)) = f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} B_i\right).$$

   Or on sait que $\bigcup_{i=1}^{+\infty} B_i \in \mathcal{T}$ donc $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \in f^{-1}(\mathcal{T})$.

   3 points

2. (a) Comme $\mathcal{A} \subset \sigma(\mathcal{A})$, on a donc $f^{-1}(\mathcal{A}) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{A}))$, puis

   $$\sigma(f^{-1}(\mathcal{A})) \subset \sigma(f^{-1}(\sigma(\mathcal{A}))) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{A})),$$

   où l'égalité provient de la première question.1 point

   (b) On va noter $\mathcal{T} = \sigma(\mathcal{A})$ et $\mathcal{S} = \sigma(f^{-1}(\mathcal{A}))$. $\mathcal{T}$ et $\mathcal{S}$ sont des tribus. On va montrer que

   $$\mathcal{C} = \{X \in \mathcal{T}; f^{-1}(X) \in \mathcal{S}\}$$

   est également une tribu.

   — $\varnothing \in \mathcal{T}$ et $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing \in \mathcal{S}$, donc $\varnothing \in \mathcal{C}$.

   — Soit $A \in \mathcal{C}$. Comme A est dans $\mathcal{T}$ qui est une tribu, A^c est aussi dans $\mathcal{T}$. Par ailleurs, $f^{-1}(A^c) = \complement f^{-1}(A)$. Or $f^{-1}(A)$ est dans $\mathcal{S}$ car A est dans $\mathcal{C}$; comme $\mathcal{S}$ est une tribu, $\complement f^{-1}(A)$ est aussi dans $\mathcal{S}$, ce qui achève de montrer que $A^c \in \mathcal{C}$.

   — Soit $(A_i)_{i\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{C}$. Ce sont des éléments de la tribu $\mathcal{T}$, donc leur réunion dénombrable $A = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$ est encore dans $\mathcal{T}$. Les propriétés classiques de l'image réciproque donnent

   $$f^{-1}(A) = \bigcup_{i=1}^{+\infty} f^{-1}(A_i).$$

   Or les $f^{-1}(A_i)$ sont chacun dans $\mathcal{S}$, comme $\mathcal{S}$ est une tribu, il en est de même de leur réunion dénombrable A, ce qui achève de montrer que $A \in \mathcal{C}$.

   Ayant vérifié les 3 axiomes, on peut dire que $\mathcal{C}$ est une tribu.3 points

   (c) Par définition de $f^{-1}(\mathcal{A})$, il est clair que $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$. On en déduit que $\sigma(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ avec la question précédente ; ainsi $\mathcal{C}$ est égale à $\sigma(\mathcal{A})$, et donc

   $$\forall X \in \sigma(\mathcal{A}) f^{-1}(X) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{A})),$$

ce qui signifie que

$$f^{-1}(\sigma(\mathcal{A})) \subset \sigma(f^{-1}(\mathcal{A})),$$

ce qui nous permet de conclure par double inclusion.3 points

On a vu plusieurs fois l'affirmation suivante :

Si $X \in f^{-1}(\sigma(\mathcal{A}))$, alors $f(X) \in \sigma(\mathcal{A})$.

C'est faux. Prendre par exemple

$$\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}); \forall x \in A \ \ -x \in A\}.$$

$\mathcal{A}$ est une tribu ; c'est la tribu des parties symétriques de $\mathbb{R}$; on a donc $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{A})$. Si on prend $X = \{-1; 0; 1\}$, on a clairement $X \in \mathcal{A}$. Pour $f(x) = x^2$, on a aussi $X = f^{-1}(X)$, donc $X \in f^{-1}(\mathcal{A}) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{A}))$. Pourtant $f(X) = \{0; 1\} \notin \mathcal{A} = \sigma(\mathcal{A})$.

Partie II bis 5 points

1. Ecrivons d'abord : $M_2 = \{0; 2; 4\}$ et $M_3 = \{0; 3\}$ et posons $\mathcal{T} = \sigma(M_2, M_3)$ On a $\{3\} = M_3 \backslash M_2 = M_3 \cap M_2^c$, ce qui montre que $\{3\} \in \mathcal{T}$. En effet M_2 et M_3 sont dans la tribu $\mathcal{T}$ et une tribu est stable par complémentation et par intersection deux à deux.1 point

   Dans plusieurs copies, on a cru pouvoir conclure une fois qu'il a été établi que $\{3\}$ est inclus dans l'intersection de deux éléments de $\mathcal{T}$.

   C'est faux : un ensemble inclus dans un élément d'une tribu n'a aucune raison d'appartenir à cette tribu.
   Par exemple, si $\Omega = \{-1; 0; 1\}$ et $A = \{-1; 1\}$, on a $\{1\} \subset A$, mais

   $$\{1\} \notin \sigma(A) = \{\varnothing; \{-1; 1\}; \{0\}; \{-1; 0; 1\}\}.$$

2. Pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, on peut écrire $A = \bigcup_{i \in A} \{i\}$. Ainsi, on a écrit A comme étant une réunion finie d'éléments de $\sigma(\mathcal{S})$ (plus précisément d'éléments de $\mathcal{S}$), il est dans la tribu $\sigma(\mathcal{S})$. Ainsi $\mathbb{P}(\Omega) \subset \sigma(\mathcal{S})$. L'inclusion réciproque est plus simple : les singletons $\{i\}$ pour $i \in \{0, \dots, 5\}$ étant dans la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$, la tribu qu'ils engendrent reste dans $\mathcal{P}(\Omega)$.1 point

   Dans beaucoup de copies, les arguments ont été assez lourds et peu convaincants, parfois en distinguant inutilement suivant le cardinal de A, alors que l'important était qu'un élément A s'écrit comme réunion <u>finie</u> de singletons.

3. Comme M_2, M_3, A sont des parties de Ω, la tribu qu'ils engendrent reste une sous-tribu de $\mathcal{P}(\Omega)$. Vu la question précédente, pour montrer l'égalité, il suffit de montrer que les singletons $\{i\}$ pour i entre 0 et 5 sont dans $\sigma(M_2, M_3, A)$ Autrement, il s'agit de voir si connaître l'appartenance (ou non) à M_2, à M_3, et à A permet d'identifier les

éléments de Ω. On a déjà vu que connaissance de l'appartenance à M_2 et à M_3 permet d'identifier $\{3\}$, puisque $\{3\} = M_3 \backslash M_2 = M_3 \cap M_2^c \in \sigma(M_2, M_3)$. On a également $\{0\} = M_3 \cap M_2 \in \sigma(M_2, M_3)$. A plus forte raison, $\{0\}$ et $\{3\}$ sont dans $\sigma(M_2, M_3, A)$. En revanche, M_2 et M_3 échouent à séparer 2 de 4 et 1 de 5 : on a $\{2, 4\} = M_2 \backslash M_3 \in \sigma(M_2, M_3)$ et $\{1, 5\} = M_2^c \cap M_3^c \in \sigma(M_2, M_3)$, mais on ne peut pas faire mieux (je ne prétends pas le montrer ici ; on peut par exemple se convaincre que n questions ne peuvent permettre d'identifier plus de 2^n personnes). La connaissance supplémentaire de A permet l'identification : on a

— $\{2\} = \{2, 4\} \cap A$
— $\{4\} = \{2, 4\} \cap A^c$
— $\{1\} = \{1, 5\} \cap A$
— $\{3\} = \{1, 5\} \cap A^c$

Les écritures ci-dessous représentent ces singletons comme intersection d'un élément de $\sigma(M_2, M_3)$ et d'un élément de $\sigma(A)$, donc comme intersection d'éléments de $\sigma(M_2, M_3, A)$: ils sont donc dans la tribu $\sigma(M_2, M_3, A)$, ce qui achève la preuve. 3 points

Dans cette question comme dans la première, plusieurs personnes font le mon travail d'écriture, sans mentionner que les éléments qu'ils utilisent sont bien dans la tribu cible. En mathématiques, il faut toujours expliquer ce qu'on fait.

Partie III 6,5 points

1. X est la loi du rang du premier succès dans une suite d'expériences aléatoires indépendantes de même probabilité p, donc la variable aléatoire X suit une loi géométrique avec une probabilité de succès p et une probabilité d'échec $q = 1 - p$.

   La probabilité que $X = k$, c'est-à-dire que la première réussite apparaisse exactement au k-ième lancer, est donnée par :

   $$\mathbb{P}(X = k) = q^{k-1}(1 - p).$$

   2 points

2. Probabilité que X soit divisible par n : Pour que X soit divisible par n, il faut que le premier succès survienne à un lancer dont l'indice est un multiple de n, soit n, $2n$, $3n$, etc.au lancer 2, 4, 6, etc. La probabilité que n divise X s'écrit donc comme la probabilité d'une réunion disjointe

   $$\mathbb{P}(\bigcup_{k\geq 1} \{X = kn\}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = kn) = \sum_{k=1}^{+\infty} pq^{kn-1} = \frac{pq^{n-1}}{1 - q^n} = \frac{p(1-p)^{n-1}}{1 - (1-p)^n}.$$

   1,5 point

3. La probabilité pour que X soit divisible par 3 sachant qu'il est pair est le quotient de la probabilité que X soit divisible par 3 et pair par la probabilité qu'il soit pair.

Or, dire que X est divisible par 3 et pair est exactement dire que 6 divise X.

On a donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(3 \text{ divise } X|X \text{ pair}) &= \frac{\mathbb{P}(3 \text{ divise } X, X \text{ pair})}{\mathbb{P}(X\text{pair})} \\ &= \frac{\mathbb{P}(6 \text{ divise X})}{\mathbb{P}(2 \text{ divise X})} \\ &= \frac{\frac{pq^5}{1-q^6}}{\frac{pq}{1-q^2}} = \frac{q^4}{(1-q^6)/(1-q^2)} = \frac{q^4}{1+q^2+q^4}.\end{aligned}$$

Pour $p = q = \frac{1}{2}$, on trouve

$$\mathbb{P}(3 \text{ divise } X|X \text{ pair}) = \frac{1}{2^4(1+q^2+q^4)} = \frac{1}{2^4+2^2(2q)^2+(2q)^4} = \frac{1}{16+4+1} = \frac{1}{21}.$$

3 points