DEVOIR 1

DIPLOME : Licence de Mathématiques	Durée du sujet : 2H
UE : Intégration et Probabilités	Nom du rédacteur : O. GARET
Semestre : 5	
Epreuve de :	■ Seul document autorisé :1 recto A4 manuscrit
Session 1	☐ Documents autorisés
Date : 18 novembre 2024	☐ Calculatrices autorisées
Horaire : 09H00–11H00	■ Calculatrice non autorisée

Le sujet est composé de quatre parties indépendantes. Tout résultat nécessaire pourra être admis.

Barème indicatif, par partie : 13–9–5–5.

Le sujet est long, il n'est pas attendu que les candidats fassent tout, la qualité de l'argumentation est un élément important d'appréciation des copies.

*** Partie I : Autour d'un théorème de Dini ***

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

   Montrer que pour tout x réel $f_n(x) \to e^x$.

2. On suppose plus généralement que (f_n) est une suite de fonctions croissantes sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ avec

$$\forall x \in I : \quad f_n(x) \to f(x),$$

   où f est une fonction continue.
   Soit (x_n) une suite d'éléments de I, de limite $x \in I$.

   (a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe b et c dans I avec $b < x < c$ et

$$\forall y \in [b, c] \quad f(x) - \varepsilon < f(y) < f(x) + \varepsilon.$$

   (b) Justifier l'existence de n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$ on a $b \leqslant x_n \leqslant c$.

   (c) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} f_n(x_n) \leqslant f(x) + \varepsilon \quad \text{et} \quad \underline{\lim_{n\to+\infty}} f_n(x_n) \geqslant f(x) - \varepsilon.$$

   (d) Montrer enfin que $f_n(x_n) \to f(x)$.

3. En déduire la limite de $(1+\sin(\frac{1}{n}))^n$ lorsque n tend vers l'infini.
4. On pose $u_n = (1+\frac{\cos n}{n})^n$.
   (a) Montrer les inégalités
$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\ u_n \le e \text{ et } \underline{\lim_{n\to+\infty}}\ u_n \ge \frac{1}{e}.$$
   (b) On admet que l'ensemble des valeurs d'adhérences de la suite $(\cos(n))_{n\ge1}$ est l'ensemble $[-1,1]$ tout entier.
   Déterminer les valeurs de
$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\ u_n \text{ et } \underline{\lim_{n\to+\infty}}\ u_n.$$

*** Partie II : Le théorème fondamental de la mesurabilité ***

Soit f une application quelconque d'un ensemble Ω dans un ensemble Ω'. Pour toute tribu $\mathcal{T}$ sur Ω', on note $f^{-1}(\mathcal{T}) = \{f^{-1}(T) :\ T \in \mathcal{T}\}$.

1. Montrer que $f^{-1}(\mathcal{T})$ est une tribu sur Ω.
2. Soit $\mathcal{A}$ un élément de $\mathcal{P}(\Omega')$.
   (a) Montrer que
$$\sigma(f^{-1}(\mathcal{A})) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{A})).$$
   (b) Notons
$$\mathcal{C} = \{X \in \sigma(\mathcal{A}); f^{-1}(X) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{A}))\}.$$
   Montrer que $\mathcal{C}$ est une tribu qui contient $\mathcal{A}$.
   (c) Montrer enfin que $\sigma(f^{-1}(\mathcal{A})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{A}))$.

*** Partie II bis : petites tribus ***

On pose $\Omega = \{0,1,2,3,4,5\}$, et pour $k \ge 1$, $M_k = \Omega \cap k\mathbb{Z}$.

1. Montrer que $\{3\} \in \sigma(M_2, M_3)$.
2. On pose $\mathcal{S} = \{\{0\},\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\}\}$.
   Montrer que $\sigma(\mathcal{S}) = \mathcal{P}(\Omega)$.
3. On pose $A = \{0,1,2\}$. Montrer que $\sigma(M_2, M_3, A) = \mathcal{P}(\Omega)$.

*** Partie III : Probabilités ***

Pour p réel de $]0,1[$, on pose $q = 1-p$ et on considère une suite d'événements indépendants de même probabilité p. On note X le rang de la première réussite dans cette suite d'événements.

1. Donner la loi de X.
2. Soit $n \ge 1$. Montrer que la probabilité que n divise X vaut $\frac{p(1-p)^{n-1}}{1-(1-p)^n}$.
3. Exprimer en fonction de q la probabilité que 3 divise X sachant que X est pair (autrement dit $\mathbb{P}(3 \text{ divise X}|X \text{ pair})$).
   Pour $p = \frac{1}{2}$, on vérifiera que la probabilité cherchée vaut $\frac{1}{21}$.

FIN