DEVOIR 1

DIPLOME : Licence de Mathématiques	Durée du sujet : 2H
UE : Intégration et Probabilités	Nom du rédacteur : O. GARET
Semestre : 5	
Epreuve de : Session 1	■ 1 recto A4 autorisé
	■ Autres documents non autorisés
Date : 8 novembre 2023	☐ Calculatrices autorisées
Horaire : 09H00–11H00	■ Calculatrice non autorisée

Barème approximatif : exercice 1 : 1 point, exercice 2 : 6 points ; exercice 3 : 5 points ; exercice 4 : 6 points ; exercice 5 : 13 points.

Exercice 1 Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a les inégalités $\log(1+x) \leq x$ et $|\sin(x)| \leq x$.

Exercice 2

1. Montrer que que quels que soient les réels positifs x et y, on a $\sqrt{xy} \leq \frac{1}{2}(x+y)$.
2. Soient (a_n),(b_n) deux suites à termes positifs.

   On pose $A = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \; a_n$ et $B = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \; b_n$.

   (a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe N tel que pour tout $n \geq N$,

   $$a_n b_n \leq \left(\frac{A+B}{2} + \varepsilon\right)^2.$$

   (b) Montrer que

   $$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \; a_n b_n \leq \frac{(A+B)^2}{4}.$$

   (c) Donner un exemple avec $A = B = 1$ et $\overline{\lim_{n\to+\infty}} \; a_n b_n = 0$.

Exercice 3 Pour quelles valeurs de α réel l'intégrale impropre

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^\alpha} e^{-x} \, dx$$

est-elle convergente ?

Exercice 4

1. Posons, pour $n \geq 1$ et x réel strictement positif : $f_n(x) = \frac{\sin(x/n)}{x/n} e^{-x}$. Justifier soigneusement l'intégrabilité de f_n sur $]0, +\infty[$ par rapport à la mesure de Lebesgue.
2. Montrer que $\int_{]0,+\infty[} \frac{\sin(x/n)}{x/n} e^{-x} \, d\lambda(x)$ admet une limite lorsque n tend vers l'infini et déterminer cette limite.

Exercice 5 Pour $s > 1$, on pose $\zeta(s) = \sum_{k\geq 1} k^{-s}$. On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ suit la loi Zêta de paramètre s si pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{\zeta(s)} \frac{1}{n^s}.$$

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi Zêta de paramètre 2.

1. Pour n entier naturel non nul, calculer

$$\mathbb{P}_X(n\mathbb{N}^*) = \mathbb{P}(X \in n\mathbb{N}^*) = \mathbb{P}(n \text{ divise } X).$$

   (On ne demande pas de justifier que ces trois quantités sont égales.)

2. Montrer que $\mathbb{P}(\frac{Y}{X} = 2) = \frac{1}{10}$.

   On admettra que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ et $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$.

3. Pour k entier naturel non nul, on note $k\mathbb{N}^*$ l'ensemble des multiples entiers naturels non nuls de k : $k\mathbb{N}^* = \{kn; n \geq 1\}$.
   Montrer que $\sigma(6\mathbb{N}^*) \subset \sigma(2\mathbb{N}^*, 3\mathbb{N}^*)$.

4. On note $\mathcal{C} = \{k\mathbb{N}^*; k \geq 1\} = \{\mathbb{N}^*, 2\mathbb{N}^*, 3\mathbb{N}^*, \dots\}$. Montrer que $\mathcal{C}$ est un π-système, c'est à dire que pour tout $A \in \mathcal{C}$ et $B \in \mathcal{C}$, on a $A \cap B \in \mathcal{C}$.

   Pour n, k entiers naturels non nuls, on notera $n \vee k$ leur plus petit commun multiple et $n \wedge k$ leur plus grand commun diviseur.

5. Soit n un entier naturel non nul. On décompose n en produit de facteurs premiers :

$$n = \prod_{i=1}^{+\infty} p_i^{\alpha_i},$$

   où $(p_i)_{i\geq 1}$ est la suite des nombres premiers.
   (Noter que la suite $(\alpha_i)_{i\geq 1}$ est nulle à partir d'un certain rang, par exemple si $n = 6$ $\alpha_i = 0$ pour $i \geq 3$.)

   (a) ♣ Montrer que le singleton $\{n\}$ est dans $\sigma(\mathcal{C})$.

   (b) En déduire que $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$.

6. ♣ Soit Z suivant la loi Zêta de paramètre 4. Montrer que les variables $X \wedge Y$ et Z ont même loi.

   Indication : autrement dit, il s'agit donc d'identifier les mesures de probabilité $\mathbb{P}_{X\wedge Y}$ et $\mathbb{P}_Z$, qui sont les mesures images de $\mathbb{P}$, respectivement par l'application $X \wedge Y$ et l'application Z.

FIN

Statistiques

43 étudiants ont composé, il n'y a eu aucune copie blanche. Le sujet, assez long, était noté sur 31 points (29 en 2022). Les notes brutes s'étendent de 1 à 23,5 (18,5 en 2022) avec une médiane à 9 (8 en 2022), un premier quartile à 13 (14,5 en 2022) et un troisième quartile à 5,7 (3,7 en 2022). La moyenne des notes brutes est 9,5, l'écart-type 5.

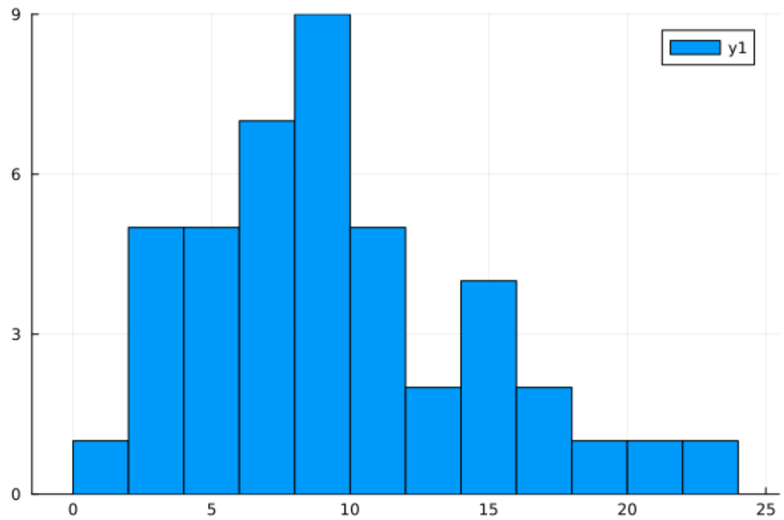


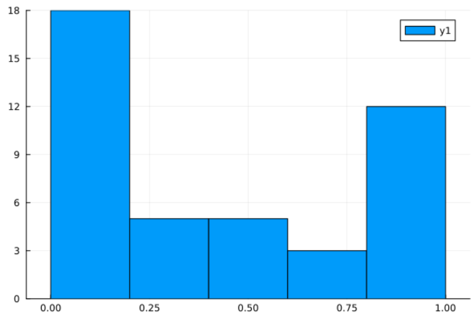
Figure 1 – Répartition des notes au partiel

L'essentiel des points a été marqué sur les exercices 4 (3,5/6 en moyenne) et 2 (2,6/5 en moyenne), ce qui était attendu.

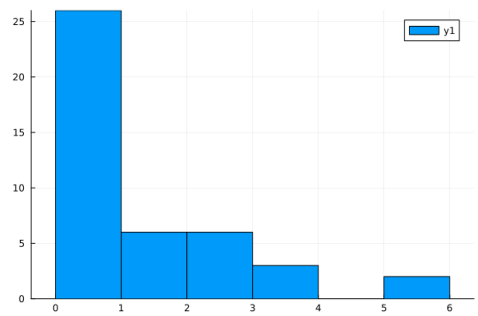
On a néanmoins retrouvé les erreurs classiques : omission de l'argument de positivité pour la détermination de la nature des intégrales par des équivalents, confusion entre développement limité et équivalent. On renvoie aux corrigés des années précédentes pour le détail des erreurs classiques.

La note moyenne à l'exercice 1 (0,4/5) est un peu décevante, pour une notion qui devrait être acquise en première année de Licence. Le mauvais résultat à l'exercice portant sur les limites supérieures (1,25/6 en moyenne) n'est pas très étonnant en début d'année, mais cette notion devra être retravaillée. Le dernier problème (moyenne 1,8/13) n'a été abordée de manière significative que dans les meilleures copies.

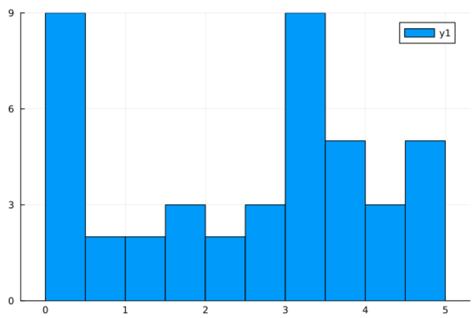
Comme les deux années précédentes, la note finale a été obtenue en arrondissant les notes au demi-entier le plus proche, puis en montant à 5 toutes les notes inférieures. La décision, mûrement réfléchie, est motivée par le fait que ce premier contrôle, en cours d'apprentissage, se fait alors que le travail de maturation des thèmes, difficiles, du cours, n'est pas encore fait pour tous les élèves. L'écrétage par le bas des notes évite de plomber trop lourdement la moyenne, et évite que l'étudiant qui n'est pas encore en réussite pose de manière prématurée un diagnostic négatif décourageant sur son potentiel. Les deux notes dépassant 20 (20,5 et 23,5) ont été ramenées à 20. Cette situation, après le partiel, n'est pas exceptionnelle ; et il est très vraisemblable qu'un travail régulier, avec une attention particulière portée à la précision des arguments, permettra à celles et ceux qui sont en position difficile, d'obtenir des résultats comparables au groupe de tête. La lecture des annales est vivement conseillée.



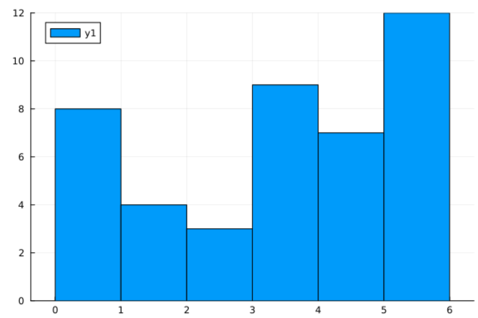
Exercice 1



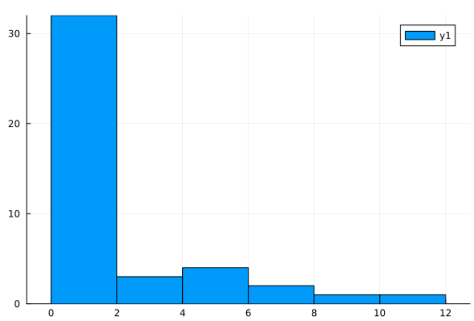
Exercice 2



Exercice 3



Exercice 4



Exercice 5

FIGURE 2 – Répartition des notes sur chaque exercice

Correction

Solution 1 Ce sont des applications de l'inégalité des accroissements finis. Précisons :

La fonction $f : x \mapsto \log(1+x)$ est continue sur $[0, +\infty[$, dérivable sur $]0, +\infty[$. Sa dérivée, donnée par $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ est majorée en valeur absolue par 1 sur $]0, +\infty[$ par 1. La fonction f est donc 1-Lipschitzienne, avec en particulier $\log(1+x) = f(x) - f(0) \leq |f(x) - f(0)| \leq |x - 0| = x$.

La fonction $f : x \mapsto \sin(x)$ est continue, dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée, la fonction cosinus est majorée en valeur absolue par 1 donc la fonction sin est 1-Lipschitzienne, avec en particulier $|\sin x| = |\sin(x) - \sin(0) \leq |x - 0| = x$.

La rédaction proposée ci-dessus est celle qui prend le plus de hauteur sur la question posée ; il peut cependant être plus rapide de refaire la preuve de l'inégalité des accroissements finis dans ces deux cas particuliers : pour tout x positif, on a

$$|\sin x| = |\int_0^x \cos u \, du| \leq \int_0^u |\cos u| \, du \leq \int_0^u 1 \, du = x$$

et

$$\log(1+x) = \int_1^{1+x} \frac{du}{u} \leq \int_1^{1+x} 1 \, du = x.$$

1 point

Plusieurs copies ont voulu utiliser l'égalité des accroissements finis, ce qui est un chemin possible, mais est souvent utilisé de manière fautive. Certains parlent d'un c tel que $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(c)$ mais ne justifient pas son existence et ne l'introduisent pas correctement, ce qui leur laisse penser que c peut être choisi indépendamment de x, et assènent sans preuve que $c = 0$. En général, un tel c ne dépendant pas de x n'existe pas.

Par ailleurs, si f est continue sur $[0, +\infty[$, dérivable sur $]0, +\infty[$, il existe bien c_x tel que $\frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(c_x)$, mais on ne peut pas forcément trouver de c tel que $|\frac{f(x)-f(0)}{x}| \leq |f'(c)|$ pour tout x. Par exemple pour $f(x) = \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}$, on a $\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x/4}} = f'(x/4)$, donc on a $c_x = x/4$, mais le supremum de $\frac{f(x)-f(0)}{x}$ vaut l'infini.

Solution 2

1. Soient x, y positifs. Comme $\sqrt{xy}$ et $\frac{1}{2}(x+y)$ sont positifs, $\sqrt{xy} - \frac{1}{2}(x+y)$ a le même signe que

$$\begin{aligned}\sqrt{xy}^2 - \left(\frac{1}{2}(x+y)\right)^2 &= xy - \frac{x^2+y^2+2xy}{4} \\ &= \frac{x^2+y^2-2xy}{4} = \frac{(x-y)^2}{4} \geq 0\end{aligned}$$

0,5 point

2. (a) Soit $\varepsilon > 0$. Comme $A + \varepsilon$ dépasse la limite supérieure de a_n, il existe N_0 tel que pour $n \geq N_0$, $a_n \leq A + \varepsilon$. Comme $B + \varepsilon$ dépasse la limite supérieure de a_n, il existe N_0 tel que pour $n \geq N_1$, $b_n \leq B + \varepsilon$. Pour tout $n \geq \max(N_0, N_1)$, comme les nombres sont positifs, la question précédente donne

$$\sqrt{a_n b_n} \leq \frac{1}{2}(a_n + b_n) \leq \frac{1}{2}(A + \varepsilon + B + \varepsilon) = \frac{A+B}{2} + \varepsilon,$$

et en élevant au carré

$$a_n b_n \leq \left(\frac{A+B}{2} + \varepsilon\right)^2.$$

1,5 point De grosses erreurs sur cette questions. Dans beaucoup de copies, on affirme que $a_n \leq A$ à partir d'un certain rang, ce qui est faux en général. Penser à la suite $a_n = \frac{n+1}{n}$.

(b) En passant à la limite supérieure dans l'inégalité, on a, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \, a_n b_n \leq \left(\frac{A+B}{2} + \varepsilon\right)^2.$$

En faisant tendre ε vers 0 dans l'inégalité, on obtient

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\; a_n b_n \leq \frac{(A+B)^2}{4}.$$

1,5 point

Là encore, de grosses erreurs. On a montré que pour tout ε, il existe N (dépendant de ε) tel que pour $n \geq N_\varepsilon$, on a

$$a_n b_n \leq \left(\frac{A+B}{2} + \varepsilon\right)^2$$

On ne peut pas en déduire que

$$a_n b_n \leq \left(\frac{A+B}{2}\right)^2$$

à partir d'un certain rang.

Le même contre-exemple que précédemment convient. Où est l'erreur ? Le problème est que pour « faire tendre ε vers 0 » dans une inégalité large, il faut que tous les autres paramètres soient fixés, or ici n n'est pas fixé, puisque chaque inégalité n'est vraie que pour certaines valeurs de n. En réalité, pour faire tendre ε vers 0, il faudrait avoir pris un n qui dépasse tous les N_ε, or il est possible que le supremum des N_ε soit l'infini.

(c) On pose $a_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$ et $b_n = \frac{1-(-1)^n}{2}$, autrement dit a_n vaut 1 si 1 est pair, 0 sinon, tandis que b_n vaut 1 si 1 est impair, 0 sinon.

Comme pour tout entier naturel non nul n, on a $a_n \leq 1$ et $b_n \leq 1$, on a $A \leq 1$ et $B \leq 1$.

Cependant 1 est la limite de a_{2n} donc 1 est une valeur d'adhérence de (a_n) donc $A \geq 1$. De même, 1 est la limite de b_{2n+1} donc 1 est une valeur d'adhérence de (b_n) donc $B \geq 1$.

Finalement $A = B = 1$. Cependant $a_n b_n = 0$ pour tout n donc $\overline{\lim_{n\to+\infty}}\; a_n b_n = 0$.2,5 points

Solution 3 La fonction $x \mapsto \frac{1-\cos x}{x^\alpha} e^{-x}$ est continue sur $]0, +\infty[$, donc localement intégrable.1 point Les éventuels problèmes sont donc en l'infini et en 0. On a $|1-\cos x| \leq 1 + |\cos x| \leq 2$, or quelque soit α réel, on a en l'infini $x^{-\alpha} = O(e^{x/2})$ avec les croissances comparées classiques, puis $\frac{1-\cos x}{x^\alpha} e^{-x} = O(e^{-x/2})$.

1,5 point

Comme la fonction $x \mapsto e^{-x/2}$ est intégrable en l'infini, il n'y a donc pas de problème d'intégrabilité en l'infini et tout se joue en 0. Or, au voisinage de 0, la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x^\alpha} e^{-x}$ est équivalente à $x \mapsto \frac{x^{2-\alpha}}{2}$ qui est manifestement positive : d'après le critère d'intégrabilité des fonctions positives équivalentes, le statut d'intégrabilité des deux fonctions en 0 est le même, ainsi avec le critère intégrabilité de la famille « Riemann », les intégrales au voisinage de 0 convergent si et seulement si $2-\alpha > -1$, soit $\alpha < 3$. 1,5 point En mettant les deux ensemble, l'intégrale converge si et seulement si $\alpha < 3$. 1 point

Solution 4 1. La fonction f_n est continue sur $]0,+\infty[$ donc mesurable (par rapport à la tribu borélienne).

— Solution 1

Pour montrer son intégrabilité, il suffit donc de la majorer en valeur absolue par une fonction intégrable sur $]0,+\infty[$. Or, d'après l'inégalité des accroissements finis, on a $|\sin y| \le |y|$ pour tout y réel, pour tout $x > 0$, donc

$$\forall n \ge 1 \quad \forall x > 0 \quad |f_n(x)| \le e^{-x}.$$

Or, on sait que $\int_{]0,+\infty[} e^{-x}\, d\lambda(x) = 1$ (vu en cours), ce qui donne le résultat voulu.

— Solution 2

Comme f_n est continue sur $]0,+\infty[$, f_n est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue si et seulement si l'intégrale impropre

$$\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\ dx$$

converge. En 0, l'intégrale est faussement impropre, car f_n se prolonge par continuité en 0 : $\sin(x/n) \sim x/n$ et $e^{-x} \sim 1$, donc $f_n(x) \sim 1$. En l'infini, on a $\frac{\sin(x/n)}{x/n} e^{-x} = o(e^{-x})$, or $\int_0^{+\infty} e^{-x}\ dx$ converge, ce qui achève de démontrer la convergence.

2 points

2. D'après l'inégalité des accroissements finis, on a $|\sin y| \le |y|$ pour tout y réel. Par ailleurs $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. On en déduit que

— $\forall n \ge 1 \forall x > 0 \quad |f_n(x)| \le e^{-x} = g(x)$; 1 point

— $\forall x > 0 \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = e^{-x}$; 1 point

— $\int_{\mathbb{R}_+} e^{-x}\ d\lambda(x) = 1 < +\infty$. 1 point

Ainsi, les hypothèses du théorème de convergence dominée sont vérifiées, et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}_+} f_n(x)\ d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-x}\ d\lambda(x) = 1.$1 point

Solution 5 1. On note μ_s la loi Zêta de paramètre s. Notons que $p\mathbb{N}^* = \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} \{pk\}$. Bien sûr, la réunion est disjointe, donc

$$\begin{aligned}\mu_s(p\mathbb{N}^*) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_s(\{kp\}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(s)} \frac{1}{(kp)^s} \\ &= \frac{1}{\zeta(s)} \frac{1}{p^s} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s} = \frac{1}{\zeta(s)} \frac{1}{p^s} \zeta(s) = \frac{1}{p^s}.\end{aligned}$$

Ainsi $\mathbb{P}(n \text{ divise } X) = \mathbb{P}_X(n\mathbb{N}^*) = \mu_2(n\mathbb{N}^*) = \frac{1}{n^2}$.2 points

2. Comme les événements $\{X = k\}_{k\ge 1}$ forment une partition de Ω, on

a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\frac{Y}{X}=2\right) &= \sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}\left(\frac{Y}{X}=2, X=k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(Y=2k, X=k)\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(Y=2k)\mathbb{P}(X=k) \text{ par indépendance}\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\zeta(s)}(2k)^{-s}\frac{1}{\zeta(s)}(k)^{-s}\\
&= \zeta(s)^{-2}2^{-s}\sum_{k=1}^{+\infty}k^{-2s} = 2^{-s}\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)^2}
\end{aligned}$$

Pour $s=2$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\frac{Y}{X}=2\right) &= 2^{-2}\frac{\zeta(4)}{\zeta(2)^2}\\
&= \frac{1}{4}\frac{\pi^4/90}{(\pi^2/6)^2} = \frac{\frac{1}{10}(\pi^2/3)^2}{(\pi^2/3)^3} = \frac{1}{10}.
\end{aligned}$$

3 points

3. C'est une conséquence de l'égalité $6\mathbb{N}^* = 2\mathbb{N}^* \cap 3\mathbb{N}^*$. En effet, par définition de la tribu engendrée, $2\mathbb{N}^* \in \sigma(2\mathbb{N}^*, 3\mathbb{N}^*)$ et $3\mathbb{N}^* \in \sigma(2\mathbb{N}^*, 3\mathbb{N}^*)$, or une tribu est stable par intersection, donc $6\mathbb{N}^* = 2\mathbb{N}^* \cap 3\mathbb{N}^* \subset \sigma(2\mathbb{N}^*, 3\mathbb{N}^*)$. 1 point .

   Certains ont cru pouvoir déduire le résultat de la seule inclusion $6\mathbb{N}^* \subset 2\mathbb{N}^* \cap 3\mathbb{N}^*$: l'argument est insuffisant : un sous-ensemble d'un élément d'une tribu n'a aucune raison d'appartenir à la tribu. Par exemple, les parties symétriques de $\mathbb{R}$ forment une tribu, l'ensemble $\{-1, +1\}$ appartient à cette tribu, mais le singleton $\{1\}$ n'appartient pas à cette tribu.

4. Soient A et B dans $\mathcal{C}$. Il existe n et k entiers naturels non nuls avec $A = \{n\mathbb{N}^*\}$ et $B = \{n\mathbb{N}^*\}$. Par définition du ppcm, on a $A \cap B = n\mathbb{N}^* \cap k\mathbb{N}^* = (n \vee k)\mathbb{N}^*$, ce qui montre que $A \cap B$ est dans $\mathcal{C}$. $\mathcal{C}$ est donc bien un π-système.1 point

5. (a) — Solution 1 (ma solution)
   Si $n = \prod_{i=1}^{+\infty} p_i^{\alpha_i}$, où (p_i) est la suite des nombres premiers et α_i le plus grand entier α tel que p_i^{α} divise n, on a

   $$\{n\} = \bigcap_{i\geq 1} (p_i^{\alpha_i}\mathbb{N}^*)\backslash(p_i^{\alpha_i+1}\mathbb{N}^*).$$

   Pour tout i, $(p_i^{\alpha_i}\mathbb{N}^*)\backslash(p_i^{\alpha_i+1}\mathbb{N}^*)$ est dans $\sigma(\mathcal{C})$, car c'est le complémentaire d'un élément de $\sigma(\mathcal{C})$ à un autre élément de $\sigma(\mathcal{C})$. Enfin, une intersection dénombrable d'éléments de $\sigma(\mathcal{C})$ est encore dans $\sigma(\mathcal{C})$. On a utilisé la stabilité d'une tribu par complémentation et par intersection dénombrable.

   — Solution 2 (d'après la solution trouvée dans la meilleure copie)
   On a

   $$n\mathbb{N}^* = \bigcup_{k\geq 1} \{kn\},$$

donc

$$\{n\} = n\mathbb{N}^*\backslash A \text{ avec } A = \bigcup_{k\geq 2} \{kn\}.$$

Posons maintenant

$$A' = \bigcup_{k\geq 2} (kn)\mathbb{N}^*.$$

On a évidemment $A \subset A'$, donc $n\mathbb{N}^*\backslash A' \subset n\mathbb{N}^*\backslash A = \{n\}$. Cependant, $n \in n\mathbb{N}^*$ et il est facile de voir que $n \notin A'$, donc $n \in n\mathbb{N}^*\backslash A'$, et on a alors

$$\{n\} = n\mathbb{N}^*\backslash A'.$$

A' est une réunion dénombrable d'éléments de $\mathcal{C}$, donc de $\sigma(\mathcal{C})$; comme $\sigma(\mathcal{C})$ est une tribu, on a $A' \in \sigma(\mathcal{C})$, de même $n\mathbb{N}^*$ est dans $\mathcal{C}$ et la différence $n\mathbb{N}^*\backslash A' = \{n\}$ est dans $\sigma(\mathcal{C})$.

1,5 point

(b) Si A est une partie de $\mathbb{N}^*$, elle est réunion (dénombrable !) des singletons qui forment A, c'est une réunion dénombrable d'éléments de $\sigma(\mathcal{C})$; c'est donc dans $\sigma(\mathcal{C})$.1,5 point

6. Soit n un entier naturel non nul. On a déjà vu que $\mathbb{P}(n|X) = \frac{1}{n^2}$. On a donc, en utilisant ce calcul et l'indépendance

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{X\wedge Y}(n\mathbb{N}^*) &= \mathbb{P}(n|X\wedge Y) = \mathbb{P}(n|X, n|Y)\\ &= \mathbb{P}(n|X)\mathbb{P}(n|Y) = \frac{1}{n^2}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^4} = \mathbb{P}_Z(n\mathbb{N}^*).\end{aligned}$$

Ainsi $\mathbb{P}_{X\wedge Y}$ et $\mathbb{P}_Z$ coïncident sur $\mathcal{C}$. Comme $\mathcal{C}$ est un π-système qui engendre $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$, on en déduit que $\mathbb{P}_{X\wedge Y}$ et $\mathbb{P}_Z$ sont égales, c'est à dire que $X \wedge Y$ et Z ont même loi. 3 points