DEVOIR 1

DIPLOME : Licence de Mathématiques UE : Intégration et Probabilités Semestre : 5 Epreuve de : Session 1 Date : 8 novembre 2023 Horaire : 09H00–11H00	Durée du sujet : 2H Nom du rédacteur : O. GARET ■ 1 recto A4 autorisé ■ Autres documents non autorisés ☐ Calculatrices autorisées ■ Calculatrice non autorisée

Barème approximatif : exercice 1 : 1 point, exercice 2 : 6 points ; exercice 3 : 5 points ; exercice 4 : 6 points ; exercice 5 : 13 points.

Exercice 1 Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a les inégalités $\log(1+x) \leq x$ et $|\sin(x)| \leq x$.

Exercice 2

1. Montrer que que quels que soient les réels positifs x et y, on a $\sqrt{xy} \leq \frac{1}{2}(x+y)$.
2. Soient (a_n),(b_n) deux suites à termes positifs.

   On pose $A = \varlimsup_{n\to+\infty} a_n$ et $B = \varlimsup_{n\to+\infty} b_n$.

   (a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe N tel que pour tout $n \geq N$,
   $$a_n b_n \leq \left(\frac{A+B}{2} + \varepsilon\right)^2.$$

   (b) Montrer que
   $$\varlimsup_{n\to+\infty} a_n b_n \leq \frac{(A+B)^2}{4}.$$

   (c) Donner un exemple avec $A = B = 1$ et $\varlimsup_{n\to+\infty} a_n b_n = 0$.

Exercice 3 Pour quelles valeurs de α réel l'intégrale impropre
$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^\alpha} e^{-x}\, dx$$
est-elle convergente ?

Exercice 4

1. Posons, pour $n \geq 1$ et x réel strictement positif : $f_n(x) = \frac{\sin(x/n)}{x/n} e^{-x}$. Justifier soigneusement l'intégrabilité de f_n sur $]0,+\infty[$ par rapport à la mesure de Lebesgue.
2. Montrer que $\int_{]0,+\infty[} \frac{\sin(x/n)}{x/n} e^{-x}\, d\lambda(x)$ admet une limite lorsque n tend vers l'infini et déterminer cette limite.

Exercice 5 Pour $s > 1$, on pose $\zeta(s) = \sum_{k\geq 1} k^{-s}$. On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ suit la loi Zêta de paramètre s si pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{\zeta(s)} \frac{1}{n^s}.$$

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi Zêta de paramètre 2.

1. Pour n entier naturel non nul, calculer

$$\mathbb{P}_X(n\mathbb{N}^*) = \mathbb{P}(X \in n\mathbb{N}^*) = \mathbb{P}(n \text{ divise } X).$$

   (On ne demande pas de justifier que ces trois quantités sont égales.)

2. Montrer que $\mathbb{P}(\frac{Y}{X} = 2) = \frac{1}{10}$.

   On admettra que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ et $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$.

3. Pour k entier naturel non nul, on note $k\mathbb{N}^*$ l'ensemble des multiples entiers naturels non nuls de k : $k\mathbb{N}^* = \{kn; n \geq 1\}$.
   Montrer que $\sigma(6\mathbb{N}^*) \subset \sigma(2\mathbb{N}^*, 3\mathbb{N}^*)$.

4. On note $\mathcal{C} = \{k\mathbb{N}^*; k \geq 1\} = \{\mathbb{N}^*, 2\mathbb{N}^*, 3\mathbb{N}^*, \dots\}$. Montrer que $\mathcal{C}$ est un π-système, c'est à dire que pour tout $A \in \mathcal{C}$ et $B \in \mathcal{C}$, on a $A \cap B \in \mathcal{C}$.

   Pour n, k entiers naturels non nuls, on notera $n \vee k$ leur plus petit commun multiple et $n \wedge k$ leur plus grand commun diviseur.

5. Soit n un entier naturel non nul. On décompose n en produit de facteurs premiers :

$$n = \prod_{i=1}^{+\infty} p_i^{\alpha_i},$$

   où $(p_i)_{i\geq 1}$ est la suite des nombres premiers.
   (Noter que la suite $(\alpha_i)_{i\geq 1}$ est nulle à partir d'un certain rang, par exemple si $n = 6$ $\alpha_i = 0$ pour $i \geq 3$.)

   (a) ♣ Montrer que le singleton $\{n\}$ est dans $\sigma(\mathcal{C})$.

   (b) En déduire que $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$.

6. ♣ Soit Z suivant la loi Zêta de paramètre 4. Montrer que les variables $X \wedge Y$ et Z ont même loi.

   Indication : autrement dit, il s'agit donc d'identifier les mesures de probabilité $\mathbb{P}_{X\wedge Y}$ et $\mathbb{P}_Z$, qui sont les mesures images de $\mathbb{P}$, respectivement par l'application $X \wedge Y$ et l'application Z.

FIN