DEVOIR 1

DIPLOME : Licence de Mathématiques	Durée du sujet : 2H
UE : Intégration et Probabilités	Nom du rédacteur : O. GARET
Semestre : 5	
Epreuve de :	■ 1 recto autorisé
Session 1	☐ Documents autorisés
Date : 7 novembre 2022	☐ Calculatrices autorisées
Horaire : 09H00–11H00	■ Calculatrice non autorisée

Le sujet est composé de deux problèmes indépendants.

Barème indicatif : problème 1 : 15 points, problème 2 : 14 points.

Le sujet est long, il n'est pas attendu que les candidats fassent tout, la qualité de l'argumentation est un élément important d'appréciation des copies.

*** Problème I ***

1. Montrer que pour tout $t \ge 0$, on a $0 \le 1 - \cos t \le \min(\frac{t^2}{2}, 2)$, puis que pour tout $t > 0$, on a $0 \le \frac{1-\cos t}{t} \le 1$.
2. Montrer que pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{1-\cos t}{t} e^{-xt}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ par rapport à la mesure de Lebesgue. On pose alors
$$\forall x > 0 \quad F(x) = \int_{]0,+\infty[} \frac{1-\cos t}{t} e^{-xt} \, d\lambda(t).$$
3. Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$, avec $F'(x) = \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x}$. Indication : on pourra commencer par prendre $x \in]a, +\infty[$, où on a choisi un réel $a > 0$ quelconque.
4. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} F(n) = 0$. En déduire que
$$\forall x > 0 \quad F(x) = \frac{1}{2} \log(1 + x^{-2}).$$
5. On pose pour $x > 0$:
$$G(x) = \int_{]0,+\infty[} \frac{1-\cos t}{t^2} e^{-xt} \, d\lambda(t).$$
Vérifier que G est bien définie, puis montrer que G est dérivable sur $]0, +\infty[$, avec $G' = -F$.

6. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que
$$\forall x > 0 \quad G(x) = C - \frac{x}{2}\log(1 + x^{-2}) - \operatorname{atan} x.$$
7. Déterminer la valeur de C (Indication : on pourra calculer de deux manières différentes la limite de G en $+\infty$).
8. Montrer que
$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2}\, dt = \frac{\pi}{2}.$$
(On commencera par montrer que l'intégrale converge.)

*** Problème II ***

Soit $\Omega =]0, +\infty[$. On note $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\Omega)$ la tribu borélienne de Ω.
Si on le juge nécessaire, on pourra admettre sans démonstration que les éléments de $\mathcal{F}$ sont exactement les boréliens de $\mathbb{R}$ qui sont inclus dans Ω, et que si une famille $\mathcal{C}$ d'ensembles engendre la tribu borélienne de $\mathbb{R}$, alors la famille des ensembles $C \cap \Omega$, où C décrit $\mathcal{C}$, engendre $\mathcal{F}$.

1. Rappeler brièvement pourquoi l'application
$$\begin{aligned} T : \Omega &\to \Omega \\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$
est $(\Omega, \mathcal{F})$-$(\Omega, \mathcal{F})$ mesurable.
2. On pose $\mathcal{I} = \{A \in \mathcal{F} ; T^{-1}(A) = A\}$. Montrer que $\mathcal{I}$ est une tribu.
3. Soit f une application $(\Omega, \mathcal{F})$-$(\Omega, \mathcal{F})$ mesurable. Montrer que f est $(\Omega, \mathcal{I})$-$(\Omega, \mathcal{F})$ mesurable si et seulement si $f \circ T = f$.
Indication : pour la réciproque, on suggère de fixer $x \in \Omega$ et de poser $A = f^{-1}(\{f(x)\})$.
4. Soit μ la mesure sur $(\Omega, \mathcal{F})$ dont la densité par rapport à la mesure de Lebesgue est $x \mapsto \frac{1}{x}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$.
   (a) Pour a, b réels avec $0 < a \leq b$, calculer $\mu(]a, b[)$, puis $\mu_T(]a, b[)$.
   (b) En déduire que $\mu = \mu_T$.
5. Soit F une fonction mesurable de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans lui-même telle que pour tout $x > 0$, $F(\frac{1}{x}) = -F(x)$. On suppose que
$$\int_{]0,+\infty[} |F(x)|\, d\mu(x) < +\infty.$$
À l'aide du théorème de transfert, montrer que
$$2\int_{]0,+\infty[} F(x)\, d\mu(x) = 0.$$
6. Convergence et calcul de
$$\int_0^{+\infty} \frac{\log(x)}{1 + x^2}\, dx.$$

FIN

Statistiques

66 étudiants ont composé, il n'y a eu aucune copie blanche. Le sujet, assez long, était noté sur 29 points (26 en 2021). Les notes brutes s'étendent de 0 à 18,5 (23 en 2021) avec une médiane à 8 (7,5 en 2021), un premier quartile à 14,5 (11 en 2021) et un troisième quartile à 3,7 (4 en 2021). La moyenne des notes brutes est 8,6, l'écart-type 5,7. Il y a une dispertion des notes très importante, comme en témoigne l'histogramme des notes brutes ci-dessous :

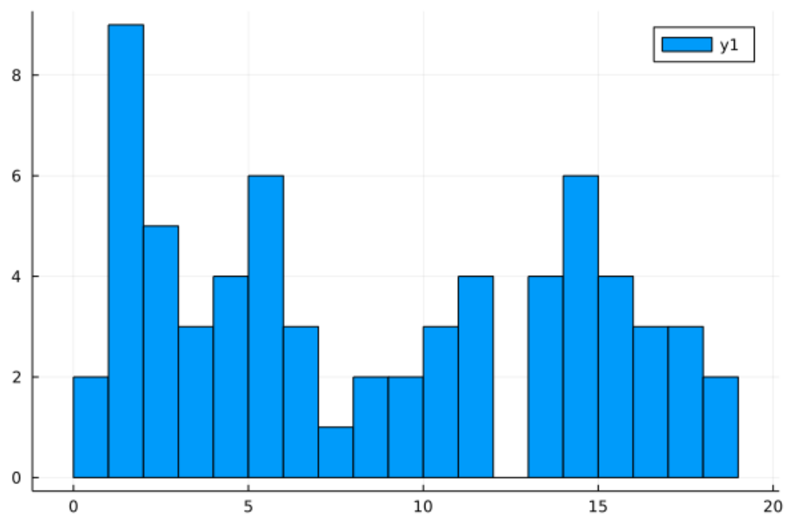
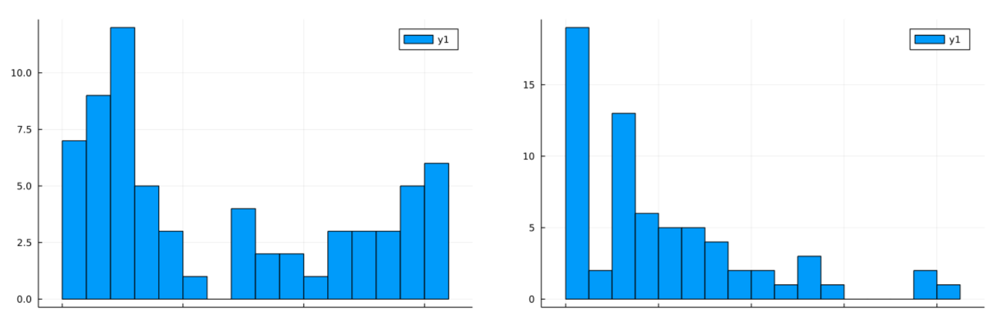


Figure 1 – Répartition des notes au partiel

Comme il était attendu, l'essentiel des points a été marqué sur le problème 1, avec une moyenne de 6,6/15, tandis que le problème 2 ne rapportait en moyenne que 2 points sur 14.



Problème 1 Problème 2

Figure 2 – Répartition des notes sur chaque problème

Comme l'an dernier, la note finale a été obtenue en arrondissant les notes au demi-entier le plus proche, puis en montant à 5 toutes les notes inférieures. La décision, mûrement réfléchie, est motivée par le fait que ce premier contrôle, en cours d'apprentissage, se fait alors que le travail de maturation des thèmes, difficiles, du cours, n'est pas encore fait pour tous les élèves, comme le montre très bien l'histogramme des notes qui évoque la superposition de deux populations, une ayant compris l'essentiel des enjeux, et l'autre étant encore en phase de maturation. L'écrétage par le bas des notes évite de plomber trop lourdement la moyenne, et évite que l'étudiant qui n'est pas encore en réussite pose de manière prématurée un diagnostic négatif décourageant sur son potentiel. Cette situation, après le partiel, n'est pas exceptionnelle ; et il est très vraisemblable qu'un travail régulier, avec une attention particulière portée à la précision des arguments, permettra à celles et ceux qui sont en position difficile, d'obtenir des résultats comparables au groupe de tête. La lecture des annales est vivement conseillée.

Commentaires

Le problème a déjà été donné au partiel 2011 et à l'examen 2021. Ci dessous la liste des remarques selon les années :

examen 2021, partiel 2022 Des confusions entre les lettres, avec des expressions dépendant de lettres différentes des deux côtés.
Trop souvent, les symboles mathématiques utilisés ne sont pas introduits, ce qui favorise les erreurs et qui, avec un correcteur un peu exigeant, pourrait entraîner la note zéro à la question concernée.

examen 2021, partiel 2022 Des confusions entre développements limités et équivalents, voire entre développements limités et égalités. Ce sont des erreurs graves.

partiel 2011, examen 2021, partiel 2022 L'erreur suivante a été fréquemment rencontrée dans la première question : du développement asymptotique $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$, de nombreux étudiants croient pouvoir déduire que pour tout $t \geq 0$, $\cos t \leq 1 - \frac{t^2}{2}$. Il faut retenir qu'un développement asymptotique en $o()$ au voisinage de 0 traduit l'existence d'une limite pour une certaine quantité : on peut, certes, en déduire des inégalités, mais sur un voisinage de 0 dont on ne connait pas l'amplitude : de $f(t) = \frac{t^2}{2} + o(t^2)$, je peux déduire par exemple qu'il existe M tel que

$$\forall t \in [-M, M] \quad f(t) \leq t^2,$$

mais je ne peux donner *a priori* de contrôle sur M.
Par exemple, si $f(t) = f_K(t) = \frac{t^2}{2} + K|t|^3$, j'ai bien $f_K(t) = \frac{t^2}{2} + o(t^2)$, mais je n'ai l'inégalité $f(t) \leq t^2$ que pour $t \in [-\frac{1}{2K}, \frac{1}{2K}]$.

partiel 2011 L'énoncé de la deuxième question a parfois été mal compris : certains s'arrêtent après avoir dit que la fonction que l'on souhaite intégrer est mesurable et positive. Il est vrai que dans ce cas, l'intégrale a toujours un sens si l'on admet qu'elle puisse valoir $+\infty$, mais dans le contexte, il était attendu que l'on montre (à un moment ou à un autre) que la valeur de l'intégrale était finie.

partiel 2011, examen 2021, partiel 2022 À la question 6, plusieurs étudiants ont cru pouvoir calculer F à partir de sa dérivée. Rappelons que si $F' = f$ sur un intervalle I et que G est une primitive de f sur I, alors il existe une constance C telle que $F(x) = G(x) + C$ pour tout $x \in I$, mais C n'est pas forcément nul.

partiel 2011, examen 2021, partiel 2022 Il faut revoir les théorèmes sur les intégrales dépendant d'un paramètre, en particulier le théorème de dérivabilité.

Certains étudiants croient qu'ils suffit de vérifier l'intégrabilité de $\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)$ pour avoir la dérivabilité de $x \mapsto \int \frac{\partial}{\partial x}f(x,t)\,d\lambda(t)$. D'autres, ont bien compris qu'il faut trouver g avec $|\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)| \le g(t)$, mais négligent de vérifier l'intégrabilité de g, voire l'affirment contre toute évidence. On a ainsi parfois lu que $t \mapsto \frac{1}{t}$ était intégrable sur $]0,+\infty[$, ou, plus grave, que la fonction constante égale à 1 l'était.

partiel 2011, partiel 2022 Établir des inégalités utiles est encore une grosse difficulté pour la grande majorité des étudiants. Il faut se familiariser avec les inégalités classiques et de ne plus se tromper sur le sens des inégalités, par exemple il faut être capable de dire sans hésitation que si $b \ge a$ et $x > 0$, alors $e^{-bx} \le e^{-ax}$ et non l'inverse. Seule la pratique intensive des exercices, crayon en main, permet de progresser.

Le deuxième problème, posé pour la première fois cette année, testait les définitions de base sur les tribus et le calcul de base sur des mesures à densité et des définies comme des mesures images.

1. Beaucoup trop de réponses farfelues à la première question. Comme il était précisé dans la question, l'argument attendu était très simple. Répondre au hasard en espérant donner la réponse attendue, ne correspond pas à la rigueur attendue d'un mathématicien ou d'une mathématicienne.
2. Certaines copies laissent entendre que pour que $\mathcal{I}$ soit une sous-tribu de $\mathcal{F}$, il faut que pour toutes suite (A_n) d'éléments de $\mathcal{F}$, $\bigcup_{n\ge1} A_n \in \mathcal{I}$. Ce n'est, heureusement, pas nécessaire.
3. La question 3 a été souvent mal rédigée. Il est possible que de nombreux étudiants connaissaient les bons arguments, mais n'ont pas jugé nécessaire de les écrire sur leur copie (« donc »n'est pas un argument).

Correction

Problème 1 15 points

1. Pour tout $t \ge 0$, on a $-1 \le \cos t \le 1$, ce qui entraîne évidemment $0 \le 1-\cos t \le 2$. Pour $x \ge 0$ $\sin x = \int_0^x \cos u\ du \le \int_0^x 1\ du = x$, puis $1-\cos t = \int_0^t \sin x\ dx \le \int_0^t x\ dx = \frac{t^2}{2}$.
   On a donc bien $0 \le 1-\cos t \le \min(\frac{t^2}{2}, 2)$, d'où $\frac{1-\cos t}{t} \le \min(\frac{t}{2}, \frac{2}{t})$. Si $t \ge 2$, $\frac{2}{t} \le 1$, sinon $\frac{t}{2} \le 1$. Dans les deux cas $\min(\frac{t}{2}, \frac{2}{t}) \le 1$ et donc $0 \le \frac{1-\cos t}{t} \le 1$. 2 points
2. Soit $x > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{1-\cos t}{t}e^{-xt}$ est continue sur $]0,+\infty[$, donc mesurable par rapport à la tribu borélienne.
   Comme $|\frac{1-\cos t}{t}e^{-xt}| = \frac{1-\cos t}{t}e^{-xt} \le e^{-xt}$ et que $\int_{]0,+\infty[} e^{-xt}\ d\lambda(t) = \frac{1}{x} < +\infty$, la fonction $t \mapsto \frac{1-\cos t}{t}e^{-xt}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ par rapport à la mesure de Lebesgue. 1 point
3. Soit $a > 0$. On a $\frac{\partial}{\partial x}\frac{1-\cos t}{t}e^{-xt} = -(1-\cos t)e^{-xt}$, donc

$$\forall x \in]a,+\infty[\quad \forall t \in]0,+\infty[\quad |\frac{\partial}{\partial x}\frac{1-\cos t}{t}e^{-xt}| = (1-\cos t)e^{-xt} \le 2e^{-at}.$$

Comme $\int_{]0,+\infty[} 2e^{-at}\ d\lambda(t) = \frac{2}{a} < +\infty$, le théorème de dérivation sous le signe intégrale nous donne la dérivabilité de F sur $]a, +\infty[$, avec

$$F'(x) = \int_{]0,+\infty[} (\cos t - 1)e^{-xt}\ d\lambda(t) = \int_{]0,+\infty[} \cos t\ e^{-xt}\ d\lambda(t) - \frac{1}{x}.$$

Comme $|e^{it}e^{-tx}| = e^{-tx}$, la fonction $t \mapsto e^{it}e^{-tx}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$:

$$\begin{aligned}\int_{]0,+\infty[} e^{it}e^{-tx}\ d\lambda(t) &= \lim_{M\to+\infty} \int_{]0,M[} e^{it}e^{-tx}\ d\lambda(t)\\ &= \lim_{M\to+\infty} \frac{1-e^{(i-x)M}}{x-i}\\ &= \frac{1}{x-i} = \frac{x+i}{x^2+1}.\end{aligned}$$

On en déduit

$$\mathbf{Re} \int_{]0,+\infty[} e^{it}e^{-tx}\ d\lambda(t) = \frac{x}{x^2+1},$$

soit

$$\int_{]0,+\infty[} \cos t e^{-tx}\ d\lambda(t) = \frac{x}{x^2+1},$$

et finalement $F'(x) = \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x}$ pour tout $x \in]a, +\infty[$. Comme tout $x > 0$ admet un voisinage de la forme $]a, +\infty[$ pour un certain $a > 0$ (par exemple $a = x/2$) , la dérivabilité de F sur $]0, +\infty[$ s'ensuit.
3 points

4. $0 \le \frac{1-\cos t}{t}e^{-nt} \le e^{-nt}$, donc en intégrant $0 \le F(n) \le \frac{1}{n}$, ce qui entraîne $\lim_{n\to+\infty} F(n) = 0$. Comme $F'(x) = \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x} = \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x}$, une primitive de F sur $]0, +\infty[$ est

$$\frac{1}{2}\log(x^2+1) - \log x = \frac{1}{2}(\log(x^2+1) - \log x^2) = \frac{1}{2}\log(1+x^{-2}),$$

donc il existe K réel tel que

$$\forall x > 0 \quad F(x) = \frac{1}{2}\log(1+x^{-2}) + K.$$

En faisant $x = n$ et en faisant tendre n vers l'infini, on obtient $K = 0$, soit

$$\forall x > 0 \quad F(x) = \frac{1}{2}\log(1+x^{-2}).$$

2 points

5. D'après les majorations établies à la question 2, on a

$$\forall x > 0 \quad \forall t > 0 \quad 0 \le \frac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt} \le \frac{1}{2}e^{-xt} \tag{1}$$

$t \mapsto \frac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt}$ étant continue, la majoration (1) assure son intégrabilité. Ainsi G est bien définie.

On a $\frac{\partial}{\partial x}\frac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt} = -\frac{1-\cos t}{t}e^{-xt}$, donc

$$\forall x \in]a,+\infty[\quad \forall t \in]0,+\infty[\quad |\frac{\partial}{\partial x}\frac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt}| = \frac{1-\cos t}{t}e^{-xt} \le e^{-at}.$$

Comme $\int_{]0,+\infty[} e^{-at}\ d\lambda(t) = \frac{1}{a} < +\infty$, le théorème de dérivation sous le signe intégrale nous donne la dérivabilité de G sur $]a,+\infty[$, avec

$$G'(x) = -\int_{]0,+\infty[} \frac{1-\cos t}{t}e^{-xt}\ d\lambda(t) = -F(x).$$

Comme tout $x > 0$ admet un voisinage de la forme $]a,+\infty[$ pour un certain $a > 0$ (par exemple $a = x/2$) , la dérivabilité de F sur $]0,+\infty[$ s'ensuit. 2 points

6. On trouve une primitive de F grâce à une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{2}\log(1+x^{-2})\ dx &= \frac{1}{2}x\log(1+x^{-2}) - \int \frac{x}{2}\frac{-2x^{-3}}{1+x^{-2}}\ dx \\ &= \frac{1}{2}x\log(1+x^{-2}) + \int \frac{1}{1+x^2}\ dx \\ &= \frac{x}{2}\log(1+x^{-2}) + \mathrm{atan} x\end{aligned}$$

Comme $G' = -F$, on en déduit qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x > 0 \quad G(x) = C - \frac{x}{2}\log(1+x^{-2}) - \mathrm{atan}\ x.$$

1 point

7. En intégrant la majoration (1), on obtient pour tout $x > 0$ l'inégalité : $0 \le G(x) \le \frac{1}{2x}$, donc $\lim_{x\to+\infty} G(x) = 0$.
   En $+\infty$, $\log(1+x^{-2}) \sim x^{-2}$, donc $-\frac{x}{2}\log(1+x^{-2}) \sim -\frac{1}{2x}$ et a donc une limite nulle en l'infini. Comme la fonction arctangente a une limite $\pi/2$ en l'infini, on a $\lim_{x\to+\infty} C - \frac{x}{2}\log(1+x^{-2}) - \mathrm{atan}\ x = C - \frac{\pi}{2}$, d'où $C = \frac{\pi}{2}$. 1 point

8. Avec la question 1), on a

$$\forall x \ge 0 \quad \forall t > 0 \quad \frac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt} \le \frac{\min(t^2/2, 2)}{t^2}e^{-xt} \le \min(\frac{1}{2}, \frac{2}{t^2}).$$

Comme pour tout $t > 0$, l'application $x \mapsto \frac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et que

$$\int_{]0,+\infty[} \min(\frac{1}{2}, \frac{2}{t^2})\ d\lambda(t) = \int_0^2 \frac{1}{2}\ dt + \int_2^{+\infty} \frac{2}{t^2} = 1 + 1 = 2 < +\infty,$$

le théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre nous dit que $x \mapsto \int_{]0,+\infty[} \frac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt}\ d\lambda(t)$ est continue. En particulier

$$\int_{]0,+\infty[} \frac{1-\cos t}{t^2}\ d\lambda(t) = \lim_{x\to0^+} \int_{]0,+\infty[} \frac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt}\ d\lambda(t) = \lim_{x\to0^+} G(x).$$

Évaluons cette limite : on a pour $x > 0$

$$G(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\log(\frac{x^2+1}{x^2}) - \text{atan } x = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\log(1+x^2) + x\log x - \text{atan } x.$$

Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} x\log x = 0$, on obtient $\lim\limits_{x\to 0^+} G(x) = \frac{\pi}{2}$, soit

$$\int_{]0,+\infty[} \frac{1-\cos t}{t^2}\, d\lambda(t) = \frac{\pi}{2}.$$

Comme $\frac{1-\cos t}{t^2}$, est continue, positive, intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue, l'intégrale de Riemann impropre existe aussi et coïncide : on a ainsi

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\, dt = \frac{\pi}{2}.$$

3 points

Problème 2 14 points

1. T est continue, donc mesurable quand on met au départ et à l'arrivée les tribus boréliennes (engendrées par les ouverts).1 point
2. — $T^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ et $\varnothing \in \mathcal{F}$, donc $\varnothing \in \mathcal{I}$.
   — Soit $A \in \mathcal{I}$. on a $T^{-1}(A) = A$, donc $\complement T^{-1}(A) = \complement A$; or on a toujours (ensembliste !) $T^{-1}(\complement A) = \complement(T^{-1}(A))$, donc finalement $T^{-1}(\complement(A)) = \complement A$; comme en plus $\complement A \in \mathcal{F}$ (car $\mathcal{F}$ est une tribu), cela montre que $\complement A \in \mathcal{I}$.
   — Si $(A_k)_{k\geq 1}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{I}$, ce sont des éléments de $\mathcal{F}$, et $\bigcup\limits_{k\geq 1} A_k \in \mathcal{F}$, car $\mathcal{F}$ est une tribu. Or

   $$T^{-1}(\bigcup_{k\geq 1} A_k) = \bigcup_{k\geq 1} T^{-1}(A_k) = \bigcup_{k\geq 1} A_k,$$

   donc $\bigcup\limits_{k\geq 1} A_k \in \mathcal{I}$

   Ces trois points ensemble montrent que $\mathcal{I}$ est une tribu.2 points
3. — Supposons que f est $(\Omega, \mathcal{I})$-$(\Omega, \mathcal{F})$ mesurable avec $f \circ T = f$. Prenons $A \in \mathcal{F}$. Comme $f \circ T = f$, $(f \circ T)^{-1}(A) = f^{-1}(A)$; mais $(f \circ T)^{-1}(A) = T^{-1}(f^{-1}(A))$ (ensembliste), donc l'ensemble $B = f^{-1}(A)$ vérifie $T^{-1}(B) = B$. Comme $A \in \mathcal{F}$ et que f est $(\Omega, \mathcal{I})$-$(\Omega, \mathcal{F})$ mesurable, on a $B \in \mathcal{F}$. Finalement $B \in \mathcal{I}$.
   Comme c'est vrai pour tout A de $\mathcal{F}$, on peut dire que f est $(\Omega, \mathcal{I})$-$(\Omega, \mathcal{F})$ mesurable.
   — Réciproquement, suppposons que f est une application $(\Omega, \mathcal{F})$-$(\Omega, \mathcal{F})$ mesurable.
   Suivant l'indication, on fixe $x \in \Omega$ et on pose $A = f^{-1}(\{f(x)\})$. Le singleton $\{f(x)\}$ est un borélien ; comme f est $(\Omega, \mathcal{I})$-$(\Omega, \mathcal{F})$ mesurable, on a $A \in \mathcal{I}$.
   On a clairement $x \in A$; or $A = T^{-1}(A)$, donc $x \in T^{-1}(A)$, ce qui signifie que $T(x) \in A$, et donc, par définition de A, que

$f(T(x)) \in \{f(x)\}$, soit $f(T(x)) = f(x)$. Comme c'est vrai pour tout $x > 0$, on a bien $f \circ T = f$.

3 points

4. (a) Pour a, b strictement positifs avec $a \leq b$, on a

$$\begin{aligned}\mu(]a,b[) &= \int_{]a,b[} d\mu(x) \\ &= \int_{]a,b[} \frac{1}{x}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)\ d\lambda(x) \\ &= \int_{]a,b[} \frac{1}{x}\ d\lambda(x) \\ &= \int_a^b \frac{dx}{x} = \log(b) - \log(a);\end{aligned}$$

et ensuite

$$\begin{aligned}\mu_T(]a,b[) = \mu(T^{-1}(]a,b[) = \mu(\frac{1}{b}, \frac{1}{a}[) \\ = \log(1/a) - \log(1/b) = -\log(a) + \log(b) = \mu(]a,b[).\end{aligned}$$

2 points

(b) Ainsi, μ et μ_T coïncident sur la famille des ensembles $]a,b[$, qui forment un π-système qui engendre $\mathcal{F}$. On en déduit que $\mu = \mu_T$.1 point

5. Comme $\mu = \mu_T$, on a

$$\begin{aligned}2\int_{]0,+\infty[} F(x)\ d\mu(x) &= \int_{]0,+\infty[} F(x)\ d\mu(x) + \int_{]0,+\infty[} F(x)\ d\mu(x) \\ &= \int_{]0,+\infty[} F(x)\ d\mu(x) + \int_{]0,+\infty[} F(x)\ d\mu_T(x)\end{aligned}$$

Comme F est intégrable, avec le théorème de transfert, il vient

$$\begin{aligned}2\int_{]0,+\infty[} F(x)\ d\mu(x) &= \int_{]0,+\infty[} F\ d\mu + \int_{]0,+\infty[} F \circ T\ d\mu \\ &= \int_{]0,+\infty[} (F + F\circ T)\ d\mu,\end{aligned}$$

où la dernière égalité vient de la linéarité de l'intégrale. Or, par hypothèse, $F + F \circ T = 0$, d'où le résultat voulu.2 points

6. On va montrer que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log(x)}{1+x^2}\ dx.$$

est absolument convergente, ou, ce qui est équivalent, que $x \mapsto \frac{\log(x)}{1+x^2}$ est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $]0,+\infty[$. La fonction $x \mapsto \frac{\log(x)}{1+x^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$, donc localement intégrable, et les éventuels problèmes sont en zéro et en l'infini.

En 0, on a l'équivalent $\sqrt{x}\frac{\log x}{1+x^2} \sim \sqrt{x}\log(x)$, or $\lim_{x\to 0_+} \sqrt{x}\log(x)$, donc $\lim_{x\to 0_+} \sqrt{x}\frac{\log x}{1+x^2} = 0$, et $\frac{\log(x)}{1+x^2} = o(\frac{1}{\sqrt{x}})$, ce qui assure l'absolue intégrabilité en 0 puisque l'intégrale $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ est convergente.

En l'infini, on a $\frac{\log x}{1+x^2} \sim \frac{\log x}{x^2} = o(\frac{\sqrt{x}}{x^2})$ car $\log x = o(\sqrt{x})$. Comme $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{1,5}}$ converge, la convergence absolue de l'intégrale en l'infini s'ensuit par comparaison. La fonction étant continue et intégrable, on a alors

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{1+x^2}\ dx &= \int_{]0,+\infty[} \frac{\log(x)}{1+x^2}\ d\lambda(x)\\ &= \int_{]0,+\infty[} \frac{\log(x)}{x^{-1}+x}\ \frac{1}{x} d\lambda(x)\\ &= \int_{\Omega} f(x)\ d\mu(x),\end{aligned}$$

avec $f(x) = \frac{\log(x)}{x^{-1}+x}$. Or $f(1/x) = -f(x)$ pour tout $x > 0$, donc l'intégrale est nulle d'après la question précédente.3 points