DEVOIR 1

DIPLOME : Licence de Mathématiques	Durée du sujet : 2H
UE : Intégration et Probabilités	Nom du rédacteur : O. GARET
Semestre : 5	
Epreuve de :	■ Seul document autorisé :1 recto A4
Session 1	☐ Documents autorisés
Date : 7 novembre 2022	☐ Calculatrices autorisées
Horaire : 09H00–11H00	■ Calculatrice non autorisée

Le sujet est composé de deux problèmes indépendants.

Barème indicatif : problème 1 : 15 points, problème 2 : 14 points.

Le sujet est long, il n'est pas attendu que les candidats fassent tout, la qualité de l'argumentation est un élément important d'appréciation des copies.

*** Problème I ***

1. Montrer que pour tout $t \geq 0$, on a $0 \leq 1 - \cos t \leq \min(\frac{t^2}{2}, 2)$, puis que pour tout $t > 0$, on a $0 \leq \frac{1-\cos t}{t} \leq 1$.
2. Montrer que pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{1-\cos t}{t} e^{-xt}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ par rapport à la mesure de Lebesgue. On pose alors
$$\forall x > 0 \quad F(x) = \int_{]0,+\infty[} \frac{1 - \cos t}{t} e^{-xt} \, d\lambda(t).$$
3. Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$, avec $F'(x) = \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x}$.
Indication : on pourra commencer par prendre $x \in]a, +\infty[$, où on a choisi un réel $a > 0$ quelconque.
4. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} F(n) = 0$. En déduire que
$$\forall x > 0 \quad F(x) = \frac{1}{2} \log(1 + x^{-2}).$$
5. On pose pour $x > 0$:
$$G(x) = \int_{]0,+\infty[} \frac{1 - \cos t}{t^2} e^{-xt} \, d\lambda(t).$$
Vérifier que G est bien définie, puis montrer que G est dérivable sur $]0, +\infty[$, avec $G' = -F$.

6. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que
$$\forall x > 0 \quad G(x) = C - \frac{x}{2}\log(1 + x^{-2}) - \operatorname{atan} x.$$
7. Déterminer la valeur de C (Indication : on pourra calculer de deux manières différentes la limite de G en $+\infty$).
8. Montrer que
$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\, dt = \frac{\pi}{2}.$$
(On commencera par montrer que l'intégrale converge.)

*** Problème II ***

Soit $\Omega =]0, +\infty[$. On note $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\Omega)$ la tribu borélienne de Ω.
Si on le juge nécessaire, on pourra admettre sans démonstration que les éléments de $\mathcal{F}$ sont exactement les boréliens de $\mathbb{R}$ qui sont inclus dans Ω, et que si une famille $\mathcal{C}$ d'ensembles engendre la tribu borélienne de $\mathbb{R}$, alors la famille des ensembles $C \cap \Omega$, où C décrit $\mathcal{C}$, engendre $\mathcal{F}$.

1. Rappeler brièvement pourquoi l'application
$$\begin{aligned} T : \Omega &\to \Omega \\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$
est $(\Omega, \mathcal{F})$-$(\Omega, \mathcal{F})$ mesurable.
2. On pose $\mathcal{I} = \{A \in \mathcal{F}; T^{-1}(A) = A\}$. Montrer que $\mathcal{I}$ est une tribu.
3. Soit f une application $(\Omega, \mathcal{F})$-$(\Omega, \mathcal{F})$ mesurable. Montrer que f est $(\Omega, \mathcal{I})$-$(\Omega, \mathcal{F})$ mesurable si et seulement si $f \circ T = f$.
Indication : pour la réciproque, on suggère de fixer $x \in \Omega$ et de poser $A = f^{-1}(\{f(x)\})$.
4. Soit μ la mesure sur $(\Omega, \mathcal{F})$ dont la densité par rapport à la mesure de Lebesgue est $x \mapsto \frac{1}{x}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$.
   (a) Pour a, b réels avec $0 < a \leq b$, calculer $\mu(]a, b[)$, puis $\mu_T(]a, b[)$.
   (b) En déduire que $\mu = \mu_T$.
5. Soit f une fonction mesurable de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans lui-même telle que pour tout $x > 0$, $F(\frac{1}{x}) = -F(x)$. On suppose que
$$\int_{]0,+\infty[} |F(x)|\, d\mu(x) < +\infty.$$
À l'aide du théorème de transfert, montrer que
$$2\int_{]0,+\infty[} F(x)\, d\mu(x) = 0.$$
6. Convergence et calcul de
$$\int_0^{+\infty} \frac{\log(x)}{1+x^2}\, dx.$$

FIN