DEVOIR 1

DIPLOME : Licence de Mathématiques	Durée du sujet : 2H
UE : Intégration et Probabilités	Nom du rédacteur : O. GARET
Semestre : 5	
Epreuve de :	■ 1 page autorisée
Session 1	☐ Documents non autorisés
Date : 20 octobre 2021	☐ Calculatrices autorisées
Horaire : 08H00–10H00	■ Calculatrice non autorisée

Barème approximatif : exercice 1 : 4 points ; exercice 2 : 5 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 5 : 8 points.

Rappels et notations : si f est une application de Ω dans $\mathbb{R}$, $\sigma(f)$ est la plus petite tribu $\mathcal{F}$ sur Ω telle que f soit $(\Omega, \mathcal{F}) - (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable. On rappelle que $\sigma(f) = \{f^{-1}(A); A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. De la même manière, si $f_1, \dots, f_n$ sont des applications Ω dans $\mathbb{R}$, $\sigma(f_1, \dots, f_n)$ est la plus petite tribu $\mathcal{F}$ telle que pour tout i entre 1 et n, f_i soit $(\Omega, \mathcal{F}) - (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable.
l'application

Exercice 1 Pour quelles valeurs de α réel l'intégrale impropre

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} e^{-x} \, dx$$

est-elle convergente ?

Exercice 2 On pose $\Omega = \{-1; 0; 1\}$; on définit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $g : \Omega \to \mathbb{R}$ par $g(x) = \max(0, x)$.

1. Décrire $\sigma(f)$ et $\sigma(g)$.
   Indication : On pourra remarquer que si h est une application à valeurs dans $\{0; 1\}$, alors pour tout borélien A de $\mathbb{R}$, on a
   $$h^{-1}(A) = h^{-1}(A \cap \{0, 1\}).$$
2. Montrer que $\sigma(f, g) = \mathcal{P}(\Omega)$.

Exercice 3 Montrer que $\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sin(x/n)}{x/n} e^{-x} \, d\lambda(x)$ admet une limite lorsque n tend vers l'infini et déterminer cette limite.

Exercice 4
1. On suppose qu'une suite (y_n) est telle qu'il existe une constante $C \in [0, 1[$, une constante réelle K, et un entier naturel n_0 avec :
   $$\forall n \geq n_0 \quad y_{n+1} = C y_n + K.$$
   Montrer que la suite (y_n) converge vers $\frac{K}{1-C}$.

2. On suppose maintenant qu'on a des suites de réels (x_n), (a_n), (b_n) et des réels positifs C_0, B_0 avec :
   — $\forall n \geq 1 \quad x_{n+1} = a_n x_n + b_n$;
   — $C_0 = \overline{\lim\limits_{n \to +\infty}} |a_n| < 1$;
   — $B_0 = \overline{\lim\limits_{n \to +\infty}} |b_n| < +\infty$;
   (a) Soit $C' \in]C_0, 1[$ et $B' \in]B_0, +\infty[$. Montrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que $\forall n \geq n_0 \quad |x_{n+1}| \leq C'|x_n| + B'$.
   (b) On pose $y_{n_0} = |x_{n_0}|$, puis, pour $n \geq n_0$:
   $$y_{n+1} = C' y_n + B'.$$
   Montrer que pour tout $n \geq n_0$, $|x_n| \leq y_n$. En déduire que $\overline{\lim\limits_{n \to +\infty}} |x_n| \leq \frac{B'}{1-C'}$, puis que $\overline{\lim\limits_{n \to +\infty}} |x_n| \leq \frac{B_0}{1-C_0}$.
3. On suppose maintenant qu'on a des suites de réels (u_n), (a_n), (b_n) et des réels a et b avec :
   — $\forall n \geq 1 \quad u_{n+1} = a_n u_n + b_n$;
   — $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = a$ et $a \in [0, 1[$;
   — $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = b \in \mathbb{R}_+$.
   Montrer que la suite (u_n) converge vers $\frac{b}{1-a}$.
4. On pose $v_1 = 0$, puis, pour $n \geq 1$: $v_{n+1} = \frac{n v_n}{2} + n.n!$. Déterminer une constante c telle qu'on ait l'équivalent en l'infini : $v_n \sim cn!$.

FIN

Commentaires

54 étudiants ont composé, il n'y a eu aucune copie blanche. Le sujet était de longueur classique, avec un barème initialement sur 23,5. Les notes ont ensuite été multipliées par 1.1, puis arrondies au demi-entier le plus proche. Ainsi la meilleure note possible était 26. La meilleure note observée est 23 ramenée à 20. La médiane est de 7.5, le premier quartile est 11 et le troisième quartile 4. Le tiers des copies a la moyenne et le premier décile est 15.5.

Règle d'or Si l'on veut durablement progresser en mathématiques, il faut renoncer une bonne fois pour toutes à l'usage de la pensée magique. Un étudiant qui se veut mathématicien ne peut écrire que des choses dont il est absolument certain. Sans cela, il obtiendra parfois quelques points par chance, mais il est impossible de progresser en jouant à la roulette russe à chaque question. La peur de l'échec, le désir de satisfaire l'enseignant, ne doivent pas guider la plume. En aucun cas il ne faut utiliser des mots que l'on ne comprend pas, même si cela doit amener à ne pas répondre à certaines questions.

La rédaction La rédaction est très souvent défaillante. Voici ce que j'écris dans le corrigé depuis plusieurs années : « Rappelons qu'une preuve se rédige classiquement sous la forme "prémisses, théorème, conclusion" ou "théorème, hypothèses, conclusion". L'énoncé du théorème ne peut être omis que si la référence précise est réputée évidente à la fois pour celui qui parle et celui qui lit (ou écoute). Le fait que le théorème ait un nom ne dispense pas de l'énoncer, particulièrement dans les cas où on donne communément le même nom à un théorème et à ses corollaires "immédiats", ou les cas où les hypothèses sont nombreuses.

Dans une copie, la seule manière de se dispenser de donner l'énoncé d'un théorème est d'en vérifier les hypothèses d'une manière suffisamment méthodique et transparente pour lever tout doute. Quant à la vérification des hypothèses, on ne peut jamais s'en abstraire. Le respect de ces règles, exigeantes, mais simples, doit permettre de gagner de nombreux points, par la double élimination des erreurs grossières crées par la panique et des imprécisions. Des entorses à ses règles peuvent exister (je ne saurais jurer que le présent corrigé en soit exempt), cependant il faut être conscient que tout écart à la règle rend le candidat dépendant des états d'âme, imprévisibles, du correcteur. »

Le niveau particulièrement alarmant de la rédaction rencontrée cette année me porte à penser que la majorité des étudiants devrait rappeler explicitement les énoncés des théorèmes utilisés. En effet, la qualité de l'expression écrite est tellement pauvre que la suggestion non explicite des hypothèses semble hors de portée pour un bon nombre d'étudiants.

Trop de copies ressemblent à un brouillon, avec des calculs non aboutis. Cela ne peut qu'agacer le correcteur, surtout si ça a un caractère récurrent dans la copie. Les petits commentaires sur ce qui a marché ou pas peuvent parfois être utiles, mais il faut avoir un peu de recul et ne pas écrire de commentaire qui pourrait vous desservir, comme cet élève qui a écrit : « J'ai montré $|x_{n+1}| < C'|x_n| + B'$ mais je n'arrive pas à avoir l'inégalité large $|x_{n+1}| \leq C'|x_n| + B'$. »

Quelques points plus précis

- Exercice 1 : seules 17 copies sur 54 obtiennent plus de la moitié des points à cet exercice qui relève du programme de deuxième année. Les symboles $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$, $\sim$ ont chacun un sens très précis en analyse. Les utiliser comme abréviation fait très mauvaise impression. J'ai retrouvé les erreurs habituelles qu'un étudiant de licence doit réussir à éradiquer :
  - Confusion entre intégrales égales et intégrales de même nature ;
  - Quelques élèves pensent pouvoir écrire
  $$|\int_a^b f(x)\ dx| \leq \int_a^b |f(x)|\ dx < +\infty$$
  pour justifier de la convergence de l'intégrale $\int_a^b f(x)\ dx$; or écrire une telle inégalité sous-entend que le membre de gauche a bien du sens, ce qui est précisément ce que l'on cherche à établir ;
  - Imprécision dans l'invocation du théorème sur la convergence d'intégrales de fonctions positives équivalentes. L'argument de positivité, essentiel, est fréquemment omis. On a pu lire « par le théorème des équivalents », ou encore « par équivalence de fonctions positives », qui n'est guère plus heureux. On a lu également « Par comparaison et par le théorème sur les intégrales de fonctions positives équivalentes ». Ici c'est le « par comparaison »qui détruit la preuve, puisque l'utilisation d'un théorème de comparaison est incompatible avec l'obtention d'une équivalence.
  - *A contrario*, certains affirment contre toute évidence que la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x^\alpha} e^{-x}$ est positive sur $\mathbb{R}_+$. Une telle affirmation ruine assurément le crédit de son auteur.
- Exercice 2 : bien peu justifient l'appartenance d'un ensemble à une tribu. Au niveau de débutant en tribus qui est normalement celui d'un étudiant de L3, on attend que les arguments de stabilité adéquats soient explicités.
- Exercice 3 : Sans même parler de la pertinence de la mise en oeuvre, la rédaction n'a pas toujours permis de convaincre le correcteur que les hypothèses du théorème de convergence dominée étaient connues. Un étudiant manquant d'expérience et/ou d'aisance dans la rédaction a tout intérêt à rappeler explicitement les hypothèses. Quelques étudiants oublient en cours de route si c'est x ou n le paramètre qu'ils veulent faire tendre vers l'infini (ou vers zéro).
- Exercice 4.
  - La question 1) de l'exercice a eu peu de succès : seulement 11 réussites sur 54 pour un résultat qui fut jadis un classique des sujets de baccalauréat. Il faut retravailler cette question.
  - 2)a) Peu de réussite pour cette question qui visait à tester si la notion de limite supérieure est acquise. Ce n'est visiblement pas le cas. Nombreux, confondant sans doute le suprémum et la limite supérieure écrivent que $\forall n \geq 1; |x_n| \leq \overline{\lim_{n\to+\infty}} |x_n|$; ce qui est en général faux. (Prendre par exemple $x_n = 1 + 1/n$).

— La question 2)b) commençait par une récurrence facile. C'est une situation très standardisée où il ne faut pas craindre de passer pour besogneux : on explicite la propriété (P_n) que l'on veut montrer par récurrence pour tout $n \geq n_0$, on montre que (P_{n_0}) est vrai (initialisation), on montre l'hérédité, c'est à dire que (P_n) entraîne (P_{n+1}) (ou $(P_{n_0}, \dots P_n)$ entraînent P_{n+1}), puis on conclut.

Pourtant, je n'ai mis la totalité des points que pour 8 copies sur 54.

De trop nombreuses copies laissent deviner au lecteur la propriété à montrer par récurrence. Quelques uns posent pour leurs récurrences des hypothèses trop optimistes (qui entraînent chacune d'un coup tous le résultat voulu), ce qui veut dire que l'initialisation échouera fatalement. On a lu par exemple : « P_n : (y_n) converge vers $\frac{K}{1-C}$ », « Supposons $|x_n| \leq y_n$, $\forall n \geq n_0$ », « Supposons $\forall n \geq n_0$ $|x_n| \leq y_n$ ».

Correction

Solution 1 La fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x^\alpha} e^{-x}$ est continue sur $]0, +\infty[$, donc localement intégrable.1 point Les éventuels problèmes sont donc en l'infini et en 0. L'inégalité des accroissements finis nous donne l'inégalité bien connue : pour tout x réel, $|\sin x| \leq |x|$ donc en l'infini, donc a

$$|\frac{\sin x}{x^\alpha}| \leq x^{1-\alpha} = O(e^{x/2})$$

avec les croissances comparées classiques, puis $\frac{\sin x}{x^\alpha} e^{-x} = O(e^{-x/2})$.

1,5 point

Comme la fonction $x \mapsto e^{-x/2}$ est intégrable en l'infini, il n'y a donc pas de problème d'intégrabilité en l'infini et tout se joue en 0. Or, au voisinage de 0, la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x^\alpha} e^{-x}$ est équivalente à $x \mapsto x^{1-\alpha}$ qui est manifestement positive : d'après le critère d'intégrabilité des fonctions positives équivalentes, le statut d'intégrabilité des deux fonctions en 0 est le même, ainsi avec le critère intégrabilité de la famille « Riemann », les intégrales au voisinage de 0 convergent si et seulement si $1 - \alpha > -1$, soit $\alpha < 2$. 1,5 point En mettant les deux ensemble, l'intégrale converge si et seulement si $\alpha < 2$. 1 point

Solution 2 1. Si h est une application à valeurs dans $\{0; 1\}$, alors $h^{-1}(\{0; 1\}) = \Omega$ et donc pour tout borélien A de $\mathbb{R}$, on a

$$h^{-1}(A) = h^{-1}(A) \cap \Omega = h^{-1}(A) \cap h^{-1}(\{0; 1\}) = h^{-1}(A \cap \{0; 1\})$$

Notation : pour $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$, on note $h^{-1}(\mathcal{A}) = \{h^{-1}(A); A \in \mathcal{A}\}$.
$A \cap \{0; 1\}$ est une partie de $\{0; 1\}$ (c'est à dire $\varnothing$, $\{0\}$, $\{1\}$ ou $\{0; 1\}$) ; ainsi, l'identité précédente nous donne $h^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) \subset h^{-1}(\mathcal{P}(\{0; 1\})$.
D'autre part $\mathcal{P}(\{0, 1\}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ car chaque ensemble fini est un borélien, donc

$$\sigma(h) = h^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) = h^{-1}(\mathcal{P}(\{0; 1\})).$$

Bien sûr $h^{-1}(\varnothing) = \varnothing$, $h^{-1}(\{0,1\}) = \Omega$.
On a ainsi 1 point

$$\sigma(h) = \{\varnothing; \Omega; h^{-1}(\{1\}); h^{-1}(\{0\})\},$$

en particulier

$$\sigma(f) = \{\varnothing; \Omega; \{-1; 1\}; \{0\}\}$$

et

$$\sigma(g) = \{\varnothing; \Omega; \{1\}; \{-1; 0\}\}.$$

2 points

2. Par définition de la tribu engendrée $\sigma(f,g) \supset \sigma(g) \cup \sigma(g)$, et donc, avec la question précédente

$$\sigma(f,g) \supset \{\varnothing; \Omega; \{-1; 1\}; \{0\}; \{1\}; \{-1; 0\}\}.$$

Comme une tribu est stable par intersection de deux ensembles, $\{-1\} = \{-1; 1\} \cap \{-1; 0\} \in \sigma(f,g)$. Finalement, tous les singletons de Ω sont dans $\sigma(f,g)$; par suite tout élément de $\mathcal{P}(\Omega)$ y est aussi car on peut écrire pour tout $B \in \mathcal{P}(\Omega) : B = \bigcup_{x \in B} \{x\}$ et B apparait alors comme une réunion finie d'éléments de la tribu $\sigma(f,g)$, donc B est dans $\sigma(f,g)$. Comme l'inclusion réciproque est évidente, on a $\sigma(f,g) = \mathcal{P}(\Omega)$. 2 points

Solution 3 Posons, pour $n \geq 1$ et x réel positif : $f_n(x) = \frac{\sin(x/n)}{x/n} e^{-x}$. D'après l'inégalité des accroissements finis, on a $|\sin y| \leq |y|$ pour tout y réel. Par ailleurs $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. On en déduit que

— $\forall n \geq 1 \quad |f_n(x)| \leq e^{-x} = g(x)$; 1 point
— $\forall x > 0 \ \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = e^{-x}$; 1,5 point
— $\int_{\mathbb{R}_+} e^{-x} \, d\lambda(x) = 1 < +\infty$. 1 point

Ainsi, les hypothèses du théorème de convergence dominée sont vérifiées, et on a $\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}_+} f_n(x) \, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-x} \, d\lambda(x) = 1$.2 points

Solution 4 1. Posons $\ell = \frac{K}{1-C}$. Comme $\ell = C\ell + K$, on a pour tout $n \geq n_0$:

$$(y_{n+1} - \ell) = C(y_n - \ell),$$

d'où, par récurrence $y_n - \ell = C^{n-n_0}(y_{n_0} - \ell)$ et

$$y_n = \ell + C^{n-n_0}(y_{n_0} - \ell).$$

Comme $|C| < 1$, on obtient que (y_n) converge vers ℓ.1 point

2. (a) On a vu en cours que la limite supérieure d'une suite est la borne supérieure de l'intervalle des valeurs qui sont dépassées une infinité de fois. Comme C' dépasse strictement C_0, la suite $|a_n|$ ne dépasse C' qu'un nombre fini de fois, ce qui signifie qu'à partir d'un certain rang n_1, on a $|a_n| \leq C'$ pour $n \geq n_1$. De même, comme B' dépasse strictement B_0, la suite $|a_n|$ ne dépasse B' qu'un nombre fini de fois, ce qui signifie qu'à partir d'un certain

rang n_2, on a $|b_n| \leq B'$ pour $n \geq n_2$. Finalement, pour tout $n \geq \max(n_0, n_1, n_2)$, on a

$$|x_{n+1}| = |a_n x_n + b_n| \leq |a_n x_n| + |b_n| \leq C'|x_n| + B'.$$

1 point

(b) On pose $y_{n_0} = |x_{n_0}|$, puis, pour $n \geq n_0$:

$$y_{n+1} = C' y_n + B'.$$

On va montrer par récurrence pour $n \geq n_0$ la proposition (H_n) : $|x_n| \leq y_n$. H_{n_0} est immédiat. Montrons que $(H_n) \Longrightarrow (H_{n+1})$. Comme $n \geq n_0$, on a $|x_{n+1}| \leq C|x_n| + B'$; (H_n) entraîne alors

$$|x_{n+1}| \leq C|x_n| + B' \leq C y_n + B' = y_{N+1},$$

ce qui est (H_{n+1}). L'hypothèse de récurrence est vérifiée au rang n_0 et héréditaire : elle est vérifiée pour tout $n \geq n_0$. 1,5 point

Comme $|x_n| \leq y_n$ pour $n \geq n_0$, on obtient en passant à la limite supérieure $\overline{\lim_{n\to+\infty}} |x_n| \leq \overline{\lim_{n\to+\infty}} y_n$; or d'après la première question, y_n converge vers $\frac{B'}{1-C'}$; donc $\overline{\lim_{n\to+\infty}} y_n = \frac{B'}{1-C'}$. Soit $L = \overline{\lim_{n\to+\infty}} |x_n|$. On a montré que

$$\forall C' \in]C_0, 1[\quad \forall B' \in]B_0, +\infty[\quad L \leq \frac{B'}{1-C'}$$

En faisant tendre B' vers B_0 en restant supérieur à B_0, on obtient que

$$\forall C' \in]C_0, 1[\quad L \leq \frac{B_0}{1-C'},$$

puis en faisant tendre C' vers C_0 en restant supérieur à C_0, on obtient que

$$L \leq \frac{B_0}{1-C_0}.$$

1,5 point

3. Posons $\ell = \frac{b}{1-a}$ et $x_n = u_n - \ell$. On a

$$\begin{aligned} x_{n+1} = u_{n+1} - \ell &= a_n(u_n - \ell + \ell) + b_n - \ell \\ &= a_n x_n + \ell a_n + b_n - \ell = a_n x_n + b'_n, \end{aligned}$$

où on a posé $b'_n = \ell a_n + b_n - \ell$.
$|a_n| \to |a| = a < 1$ et $b'_n \to \ell a + b - \ell = \ell(a-1) + b = 0$. On peut donc appliquer le résultat de la question précédente à la suite (x_n), ce qui nous donne $\overline{\lim_{n\to+\infty}} |x_n| \leq \frac{0}{1-a} = 0$, ce qui signifie que (x_n) tend vers 0, et donc u_n vers ℓ.2 points

4. On pose $u_n = \frac{v_n}{n!}$. On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{v_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{n}{2(n+1)} \frac{v_n}{n!} + \frac{n}{n+1} \\ &= \frac{n}{2(n+1)} u_n + \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

Si on pose $a_n = \frac{n}{2(n+1)}$ et $b_n = \frac{n}{n+1}$, on a en l'infini $a_n \to a = \frac{1}{2}$ et $b_n \to b = 1$ Comme $a \in [0, 1[$ et $b \geq 0$, on peut appliquer la question précédente : $x_n \to \frac{b}{1-a} = 2$, d'où $v_n \sim 2n!$.1 point