Intégration et probabilités
Partiel du 20 Octobre 2020, 14H

Instructions : *Rédiger séparément chacune des 2 parties sur des copies différentes, et placer chacune de ces 2 copies sur leur pile de copies à la fin de votre examen partiel.*
Barème indicatif: $26 = 7 + 7 + 5 + 7$ *points, 23/26 =20/20, 18/26=18/20.* **Durée :** *2 heures.*

Partie I

Exercice 1. (2+5 points)

1. Calculer, pour $n \geq 0$,

$$I_n = \int_0^1 x^n \left|\ln(x)\right| dx.$$

2. En déduire que

$$\int_0^1 e^x \left|\ln(x)\right| dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{n}.$$

Partie II

Exercice 2. (0,5+6,5 points)

1. Rappeler pourquoi, pour $x \in [0,1[$,
$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k\geq 0} (-x)^k .$$

2. En calculant $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ de deux manières, montrer que :
$$\ln 2 = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k+1}.$$
On pourra poser, pour $x \in [0,1[$, et pour $n \in \mathbb{N}$,
$$f_n(x) = \frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x}.$$

Exercice 3. (5 points) On rappelle que la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est notée λ. Soit un borélien $A \subset [0,1]$ tel que $\lambda(A) = 1$. Montrer que A est dense dans $[0,1]$.

Exercice 4. (7 points) On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des rectangles à extrémités rationnelles de $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{C} = \left\{]x_1, x_2[\times]y_1, y_2[\mid (x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{Q}^4,\ x_1 < x_2, y_1 < y_2 \right\}.$$

Montrer que
$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \sigma(\mathcal{C}).$$
On rappelle que, par définition, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \sigma(\mathcal{O}) = \sigma(\mathcal{F})$, où $\mathcal{O}$ et $\mathcal{F}$ désignent respectivement l'ensemble des ouverts et l'ensemble des fermés de $\mathbb{R}^2$.