Intégration et probabilités
Partiel du 2019-11-12

Instructions : *Rédiger séparément chacune des 2 parties sur des copies différentes, et placer chacune de ces 2 copies sur leur pile de copies à la fin de votre examen partiel.*
Barème indicatif: $8+7+8=23$ *points.* **Durée :** *2 heures.*

Partie I

Exercice 1. (8=3+5 points) Pour $n \geq 1$, on pose

$$I_n = \int_1^{+\infty} e^{-x^n} dx.$$

1. Calculer $\lim_n I_n$.
2. À l'aide du changement de variable $y = x^n$, montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour $n \geq 1$,

$$I_n \sim \frac{C}{n}.$$

   Indication: on pourra exprimer C comme une intégrale convergente, qu'on n'essaiera pas de calculer.

Partie II

Exercice 2. (7=3+4 points) Pour $n \geq 0$, on pose :

$$I_n = -\int_0^1 x^n \ln(x)\, dx.$$

Calculer I_n, à l'aide d'une intégration par parties. En déduire la valeur de

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x} dx,$$

sachant que $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Instructions : *Un seul des exercices 3 et 4 sera corrigé, au choix de l'étudiant. Si l'étudiant a choisi de rédiger les deux exercices (3 et 4) sur sa copie, son choix sera indiqué de manière claire et lisible, en tête de la deuxième copie. L'étudiant peut aussi barrer clairement sa rédaction de l'exercice non choisi.*

Exercice 3. (8=4×2 points) Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré avec $\mu(E) < +\infty$, et soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Montrer que les 5 assertions suivantes sont équivalentes:

1. f est intégrable.
2. $\lfloor |f| \rfloor$ est intégrable, où on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x, i.e. l'entier k tel que $x - 1 < k \leq x$.
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n\, \mu\left(\{n \leq |f| < n+1\}\right) < +\infty.$

4. $\sum_{n\geq 0} \mu\left(\{|f| \geq n\}\right) < +\infty.$

5. $\lim_{n\to+\infty} \int |f| \mathbb{1}_{\{|f|\geq n\}} d\mu = 0.$

Exercice 4. (8=3+3+2 points) On veut montrer que :

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

1. Pour $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}$, avec $a < b$, $c < d$, on pose

$$P_{a,b,c,d} =]a, b[\times]c, d[,$$

et on note :

$$\mathcal{P} = \left\{ P_{a,b,c,d} \;\middle|\; (a, b, c, d) \in \mathbb{Q}, a < b, c < d \right\}.$$

Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \sigma\left(\mathcal{P}\right)$, et en déduire que $\{\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$.

2. Pour $a < b$, montrer que $\mathcal{T}_{a,b}$, défini par:

$$\mathcal{T}_{a,b} = \left\{A \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}\right) \middle|\, A\times]a, b[\in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\right\},$$

est une tribu, puis que $\mathcal{T}_{a,b} = \mathcal{B}\left(\mathbb{R}\right)$.

3. Pour $A \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}\right)$, montrer que $\mathcal{T}_A$, défini par:

$$\mathcal{T}_A = \left\{B \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}\right) \middle|\, A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\right\},$$

vérifie $\mathcal{T}_A = \mathcal{B}\left(\mathbb{R}\right)$. Conclure.