Intégration et probabilités
Partiel du 2018-11-08

Instructions : *Rédiger chacune des 3 parties sur des copies différentes, et placer chacune de ces 3 copies sur leur pile de copies à la fin de votre examen partiel.*
Barème : $4 \times 6 = 24$ *points.* **Durée :** *2 heures.*

Partie I

Exercice 1. Pourquoi la relation :

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = \int_0^{+\infty} \frac{ne^{-x}}{\sqrt{1 + n^2 (1 + x^2)}}\, dx$$

définit-elle bien une suite $u = (u_n)_{n \geq 1}$ de nombres de $\overline{\mathbb{R}}$? Discuter la convergence de la suite u.

Partie II

Exercice 2. On pose

$$I_n = n \int_0^1 \frac{\cos t}{1 + n^2 t^2} dt.$$

Etudier $\lim_n I_n$. On pourra pour cela faire le changement de variable $u = nt$, et se ramener à une intégrale sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 3. On se place sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, où λ désigne la mesure de Lebesgue. Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie, pour $x \in \mathbb{R}$, par :

$$\varphi(x) = e^{-|x|}.$$

On pose $f_n(x) = \varphi(n + x), \ \forall x \in \mathbb{R}$. En calculant successivement $a = \lim_n \left(\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda\right)$ et $b = \int_{\mathbb{R}} (\lim_n f_n)\, d\lambda$, montrer que $a \neq b$. Expliquer pourquoi cela montre qu'une hypothèse précise du théorème de convergence dominée n'est pas satisfaite, et démontrer directement (d'une autre manière) que cette hypothèse n'est pas satisfaite.

Partie III

Exercice 4. On se donne un ensemble E et une *classe monotone* $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(E)$, c'est-à-dire une partie $\mathcal{M}$ de $\mathcal{P}(E)$ qui vérifie:

- *CM1:* $E \in \mathcal{M}$,
- *CM2:* si $A, B \in \mathcal{M}$, et si $A \subset B$, alors $B \backslash A \in \mathcal{M}$,
- *CM3:* si $\forall n \geq 0, \ \{A_n \in \mathcal{M}$ et $A_n \subset A_{n+1}\}$, alors

$$\cup_{n \geq 0} A_n \in \mathcal{M}.$$

De plus, on suppose que $\mathcal{M}$ est stable par intersection 2 à 2, c'est-à-dire qu'on suppose que $\{A, B \in \mathcal{M}\}$ entraîne $\{A \cap B \in \mathcal{M}\}$. Montrer qu'alors $\mathcal{M}$ est une tribu sur E.