Intégration et probabilités
Partiel du 2017-11-08

Exercice 1. (2 points) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace mesuré. On suppose que $\mathbb{P}$ est une mesure de probabilité. On se donne une famille $(A_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, telle que $\forall n \geq 0,\ \mathbb{P}(A_n) = 1$. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\cap_{n\geq 0} A_n\right) = 1.$$

Exercice 2. (4 points) On se donne un espace mesuré $(E, \mathcal{E}, \mu)$ et un élément A de la tribu $\mathcal{E}$. On pose :

$$\mathcal{A} = \{A \cap C \,|\, C \in \mathcal{E}\}, \quad \mathcal{B} = \{B \in \mathcal{E} \,|\, B \subset A\}.$$

Montrer que $\mathcal{A} = \mathcal{B}$. On admet que $\mathcal{A}$ est une tribu de parties de A, faisant ainsi de $(A, \mathcal{A})$ un espace mesurable, et on pose, pour $B \in \mathcal{A}$, $\nu(B) = \mu(B)$. Montrer que ν est une mesure sur $(A, \mathcal{A})$.

Exercice 3. (6=2+4 points) Pour $n \geq 0$, on pose :

$$I_n = -\int_0^1 x^n \ln(x)\, dx.$$

Calculer I_n, à l'aide d'une intégration par parties. En déduire la valeur de

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x} dx,$$

sachant que $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Exercice 4. (12=1+1+4+4+2 points) On se donne un espace $(E, \mathcal{E})$, mesurable, et sur cet espace, une suite $(\mu_n)_{n\geq 1}$ de mesures *de probabilité*, et une mesure de probabilité μ, toutes ayant des densités par rapport à une mesure ν sur $(E, \mathcal{E})$. Ces densités sont notées, respectivement, $(f_n)_{n\geq 1}$ et f, et sont mesurables et positives ou nulles ν p.p.. On suppose que :

$$\lim_n f_n = f, \quad \nu \text{ p.p. }.$$

On rappelle la notation :

$$\|f - f_n\|_1 = \int_E |f - f_n| \, d\nu.$$

Le but est de montrer que :

$$\lim_n \|f - f_n\|_1 = 0. \tag{1}$$

a. On note

$$A_n = \{x \in E \,|\, f_n(x) < 0\}, \; A = \{x \in E \,|\, f(x) < 0\},$$
$$C = \left\{ x \in E \,\middle|\, \lim_n f_n(x) = f(x) \right\}, \; D = C^c \quad \text{et}$$
$$B = D \cup A \cup (\cup_{n\geq 1} A_n).$$

Montrer que $\nu(B) = 0$. Dans la suite, on pourra trouver utile de se placer dans B^c, à l'occasion.

b. Calculer $\int_E f d\nu$ et $\int_E f_n d\nu$.

c. Montrer que ν p.p., $(f - f_n)_+ \leq f$ et en déduire que :

$$\lim_n \int_E (f - f_n)_+ \, d\nu = 0.$$

d. Montrer (1), après avoir montré que :

$$\|f - f_n\|_1 = 2 \int_E (f - f_n)_+ \, d\nu.$$

e. Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{E}$, $|\mu(A) - \mu_n(A)| \leq \|f - f_n\|_1$.