

Intégration et Probabilités

correction du devoir surveillé du 3 novembre 2016

\*\*\*\*\*

## Rappel du sujet

Dans tout le sujet, on pourra utiliser sans démonstration l'identité

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

**Exercice 1.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  un espace mesuré. On suppose que  $T$  est une application  $(\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\Omega, \mathcal{F})$  mesurable.

1. Montrer que l'application

$$A \mapsto \frac{1}{2}\mu(A) + \mu(T^{-1}(A)).$$

définit une mesure sur  $(\Omega, \mathcal{F})$ . On note  $\nu$  cette mesure.

2. On prend  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ , où  $\lambda$  est la mesure de Lebesgue et pour  $T$  l'application  $T(x) = 2x$ . Justifier la mesurabilité de  $T$ . Soit  $I = [a, b]$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , avec  $-\infty < a < b < +\infty$ . Calculer  $\nu(I)$ , puis identifier  $\nu$ .

**Exercice 2.** On note  $\Omega = \mathbb{N}^*$ , que l'on munit de la tribu  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$  et de la mesure de comptage  $C_{\mathbb{N}^*}$ . Pour  $s > 1$ , on pose

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s} < +\infty.$$

1. Soit  $s > 1$ . On note  $\mu_s$  la mesure sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  dont la densité par rapport à la mesure de comptage  $C_{\mathbb{N}^*}$  est

$$i \mapsto \frac{1}{\zeta(s)} \frac{1}{i^s}.$$

En particulier,

$$\forall i \in \mathbb{N}^* \quad \mu_s(\{i\}) = \frac{1}{\zeta(s)} \frac{1}{i^s},$$

ce que l'on ne demande pas de démontrer. Vérifier que  $\mu_s$  est une mesure de probabilité.

Soit  $p$  un entier naturel non-nul. Montrer que  $\mu_s(p\mathbb{N}^*) = \frac{1}{p^s}$ .

- 
2. On note  $C = \{n^2; n \in \mathbb{N}^*\}$  l'ensemble des carrés non nuls. Calculer  $\mu_s(C|2\mathbb{N}^*)$ . (On exprimera le résultat à l'aide de la fonction  $\zeta$ .)
  3. Pour  $n$  entier naturel non nul, on pose  $f(n) = \frac{n}{n+1}$ . La fonction  $f$  est-elle intégrable par rapport à  $\mu_s$ ?
  4. Calculer  $\int_{\Omega} f d\mu_2$ .

- Exercice 3.**
1. Soit  $z = c + id$  un nombre complexe, avec  $c > 0$  et  $d \in \mathbb{R}$ . Montrer que la fonction  $t \mapsto e^{-zt}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  par rapport à la mesure de Lebesgue et que  $\int_{\mathbb{R}_+} e^{-zt} d\lambda(t) = \frac{1}{z}$ .
  2. Montrer que la fonction  $x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ .
  3. En déduire que, pour tout réel  $a$ , la fonction  $x \mapsto \frac{\sin ax}{e^x - 1}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ .
  4. On pose, pour  $a$  un réel quelconque

$$F(a) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sin ax}{e^x - 1} d\lambda(x).$$

Soit  $A$  un réel quelconque. Montrer que  $F$  est continue sur  $] - A, A[$ , puis qu'elle est continue sur  $\mathbb{R}$ .

5. Soit  $a$  un réel quelconque. Étudier la convergence de la suite de fonctions définies par  $f_n^a(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin(ax) e^{-(k+1)x}$ .
6. Montrer que  $\int_{\mathbb{R}} f_n^a(x) d\lambda(x)$  tend vers  $F(a)$  quand  $n$  tend vers l'infini.
7. En déduire  $F(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2}$ .
8. Montrer que  $F$  est dérivable en 0 et calculer cette dérivée.

[ans1]

---

## Commentaires

### Commentaires généraux

57 étudiants ont composé, il n’y a eu aucune copie blanche. Le sujet était un peu long, aussi le barème était-il sur 26,5. Les notes ont ensuite été multipliées par 1.25, puis arrondies au demi-entier le plus proche. Ainsi la meilleure note possible était de 33. La meilleure note observée est 26,25 ramenée à 20 ainsi que six autres notes. La médiane est de 7.5, le premier quartile de 13 et le troisième quartile de 4. La moyenne des notes (après écrêtage à 20) est de 8,9.

**Règle d’or** Si l’on veut durablement progresser en mathématiques, il faut renoncer une bonne fois pour toutes à l’usage de la pensée magique. Un étudiant qui se veut mathématicien ne peut écrire que des choses dont il est absolument certain. Sans cela, il obtiendra parfois quelques points par chance, mais il est impossible de progresser en jouant à la roulette russe à chaque question. La peur de l’échec, le désir de satisfaire l’enseignant, ne doivent pas guider la plume. En aucun cas il ne faut utiliser des mots que l’on ne comprend pas, même si cela doit amener à ne pas répondre à certaines questions.

**La rédaction** La rédaction est encore parfois défaillante. Rappelons qu’une preuve se rédige classiquement sous la forme “prémisses, théorème, conclusion” ou “théorème, hypothèses, conclusion”. L’énoncé du théorème ne peut être omis que si la référence précise est réputée évidente à la fois pour celui qui parle et celui qui lit (ou écoute). Le fait que le théorème ait un nom ne dispense pas de l’énoncer, particulièrement dans les cas où on donne communément le même nom à un théorème et à ses corollaires “immédiats”, ou les cas où les hypothèses sont nombreuses.

Dans une copie, la seule manière de se dispenser de donner l’énoncé d’un théorème est d’en vérifier les hypothèses d’une manière suffisamment méthodique et transparente pour lever tout doute. Quant à la vérification des hypothèses, on ne peut jamais s’en abstraire. Le respect de ces règles, exigeantes, mais simples, doit permettre de gagner de nombreux points, par la double élimination des erreurs grossières créées par la panique et des imprécisions. Des entorses à ses règles peuvent exister (je ne saurais jurer que le présent corrigé en soit exempt), cependant il faut être conscient que tout écart à la règle rend le candidat dépendant des états d’âme, imprévisibles, du correcteur.

### Quelques points plus précis

- Exercice 1 : si de nombreuses copies ont pensé à utiliser que l’ensemble des mesures était stable par addition ou multiplication par une constante positive, très peu ont remarqué que  $A \mapsto \mu(T^{-1}(A))$  était la mesure image de  $\mu$  par  $T$ , ce qui dispensait alors de refaire une preuve laissée en exercice dans le polycopié, et exposée en cours. Nombreux sont qui pensent pouvoir montrer que  $\mu_T(\cup_{i \geq 1} A_i) = \sum_{i \geq 1} \mu_T(A_i)$  sans utiliser

que les  $A_i$  sont disjoints. Il faut revoir cette preuve, très formatrice, qui pourrait bien d'ailleurs être posée à nouveau en examen.

- Exercice 2 : la question 1 avait été très traitée en TD. Elle a été pourtant l'objet d'erreurs terribles que le stress de l'examen peine à excuser. On a par exemple « déduit » de  $\mu_s(\{i\}) = \zeta(s)^{-1}i^{-s}$  pour  $i \geq 1$  l'identité insensée

$$\mu_s(p\mathbb{N}^*) = \zeta(s)^{-1}(p\mathbb{N})^{-s}.$$

Quelques copies ont utilisé des identité fantaisistes, genre

$$\left(\sum_{i \geq 1} a_i\right) / \left(\sum_{i \geq 1} b_i\right) = \sum_{i \geq 1} \frac{a_i}{b_i}.$$

Sur la question 2, beaucoup d'inattentions. Il s'agissait bien de calculer  $\mu_s(C|2\mathbb{N}^*)$ , pas  $\mu_s(C \cap 2\mathbb{N}^*)$  ni  $\mu_s(C \setminus 2\mathbb{N}^*)$ .

- Exercice 3 : les identités, les propriétés, ont un domaine de validité. De l'identité  $\int_{\mathbb{R}_+} e^{-ct} d\lambda(t) = \frac{1}{c}$  pour  $c \in ]0, +\infty[$  ou du résultat  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-ct} = 0$ , on ne peut, sans argument supplémentaire, déduire quoi que ce soit pour  $c$  complexe. Certaines copies contiennent des inégalités sur des nombres complexes. C'est une erreur grave. Enfin, les écritures du type  $[F(t)]_0^{+\infty}$  sont toujours sanctionnées tant que l'on n'a pas montré que  $F$  a une limite en l'infini.

## Correction

- Solution 1**
1. Comme  $\mu$  est une mesure et  $\frac{1}{2} > 0$ ,  $\frac{1}{2}\mu$  est une mesure.  $A \mapsto \mu(T^{-1})$  est la mesure image de  $\mu$  par  $T$ , notée  $\mu_T$  dans le cours. Finalement,  $\nu$  est une mesure comme somme de deux mesures.
  2.  $T$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , donc mesurable de  $(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  dans lui-même. On a

$$\begin{aligned} T^{-1}([a, b]) &= \{x \in \mathbb{R}; 2x \in [a, b]\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}; a \leq 2x \leq b\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}; a/2 \leq x \leq b/2\} \\ &= [a/2, b/2], \end{aligned}$$

D'où  $\mu_T([a, b]) = \lambda([a/2, b/2]) = \frac{b-a}{2}$ , et finalement

$$\nu(I) = \frac{1}{2}(b-a) + \frac{b-a}{2} = b-a = \lambda(I).$$

Comme les intervalles  $[a, b]$  forment un  $\pi$ -système qui engendre  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  et que  $\mathbb{R} = \cup_{n \geq 1} [-n, n]$ , on en déduit que  $\nu = \lambda$ .

- Solution 2**
1. Notons que  $p\mathbb{N}^* = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \{pk\}$ . Bien sûr, la réunion est dis-

jointe, donc

$$\begin{aligned}\mu_s(p\mathbb{N}^*) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_s(\{kp\}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(s)} \frac{1}{(kp)^s} \\ &= \frac{1}{\zeta(s)} \frac{1}{p^s} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s} = \frac{1}{\zeta(s)} \frac{1}{p^s} \zeta(s) = \frac{1}{p^s}.\end{aligned}$$

En prenant  $p = 1$ , on a  $\mu_s(\mathbb{N}^*) = 1$  et  $\mu_s$  est bien une mesure de probabilité.

2. Notons que  $C \cap 2\mathbb{N}^* = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \{4k^2\}$ . Bien sûr, la réunion est disjointe, donc

$$\begin{aligned}\mu_s(C \cap 2\mathbb{N}^*) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_s(\{4k^2\}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(s)} \frac{1}{(4k^2)^s} \\ &= \frac{1}{\zeta(s)} \frac{1}{4^s} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2s}} = \frac{1}{\zeta(s)} \frac{1}{4^s} \zeta(2s) = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} \frac{1}{4^s}.\end{aligned}$$

Finalement

$$\mu_s(C|2\mathbb{N}^*) = \frac{\mu_s(C \cap 2\mathbb{N}^*)}{\mu_s(2\mathbb{N}^*)} = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} \frac{1}{2^s}.$$

3. Comme la tribu de départ est  $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$ , toute fonction est mesurable. Comme  $|f| \leq 1$ , on a

$$\int_{\mathbb{N}^*} |f| d\mu_s \leq \int_{\mathbb{N}^*} 1 d\mu_s = \mu_s(\mathbb{N}^*) = 1 < +\infty,$$

donc  $f$  est bien intégrable.

4. On calcule une intégrale d'une fonction positive par rapport à une mesure à densité : on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{N}^*} f(n) d\mu_2(n) &= \int_{\mathbb{N}^*} f(n) \frac{1}{\zeta(2)} \frac{1}{n^2} dC_{\mathbb{N}^*}(n) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1} \frac{6}{\pi^2} \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

On reconnaît une série télescopique :

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{N+1},$$

qui tend vers 1 lorsque  $N$  tend vers l'infini, d'où

$$\int_{\mathbb{N}^*} f(n) d\mu_2(n) = \frac{6}{\pi^2}.$$

**Solution 3** 1. Pour  $a, b$  réels, on a  $|e^{a+ib}| = |e^a e^{ib}| = |e^a| |e^{ib}| = e^a$ . En particulier  $|e^{-zt}| = e^{-ct}$ , et

$$\int_{\mathbb{R}_+} |e^{-zt}| d\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-ct} d\lambda(t) = \frac{1}{c} < +\infty,$$

donc  $z \mapsto e^{-zt}$  est intégrable. On a

$$\int_{\mathbb{R}_+} e^{-zt} d\lambda(t) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{[0, N]} e^{-zt} d\lambda(t)$$

Or,

$$\int_{[0, N]} e^{-zt} d\lambda(t) = \int_0^N e^{-zt} dt = \frac{1 - e^{-zN}}{z}.$$

Comme  $|e^{-zN}| = e^{-cN} \rightarrow 0$  quand  $N \rightarrow +\infty$ , on a

$$\int_{\mathbb{R}_+} e^{-zt} d\lambda(t) = \frac{1}{z}.$$

2. — Solution 1 : La fonction  $f : x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$  est clairement continue sur  $]0, +\infty[$ . En 0,  $e^x = 1 + x + o(x)$ , donc  $e^x - 1 \sim x$  et  $\frac{x}{e^x - 1} \sim 1$  :  $f$  admet un prolongement par continuité en 0 : l'intégrale est donc « faussement impropre » en 0. La fonction est donc localement intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ , seul le comportement à l'infini reste à étudier. Or  $\frac{x}{e^x - 1} = \frac{1}{e^{x/2}} \frac{x}{e^{x/2} - e^{-x/2}}$ . En l'infini  $\frac{x}{e^{x/2} - e^{-x/2}} \sim \frac{x}{e^{x/2}}$  tend vers 0 avec les croissances comparées classiques. Ainsi  $f(x) = o(e^{-x/2})$  en l'infini. Comme  $x \mapsto e^{-x/2}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ , on en déduit l'intégrabilité de  $f$  en l'infini, et finalement sur  $\mathbb{R}_+$ .
- Solution 2 : Pour tout  $x \geq 0$ , on a  $x \leq \sinh(x)$ , et en particulier  $x/2 \leq \sinh(x/2)$ . Pour tout  $x \geq 0$ ,  $e^x \geq 1$ . Ainsi

$$0 \leq \frac{x}{e^x - 1} \leq \frac{2 \sinh(x/2)}{e^x - 1} = \frac{e^{x/2} - e^{-x/2}}{e^x - 1} = e^{-x/2}.$$

Comme  $x \mapsto e^{-x/2}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ , le résultat s'ensuit.

3. D'après l'inégalité des accroissements finis, pour tout  $t$  réel, on a  $|\sin t| \leq |t|$ . En particulier, pour  $x \geq 0$ ,

$$\left| \frac{\sin ax}{e^x - 1} \right| \leq \frac{|ax|}{e^x - 1} = |a| \frac{x}{e^x - 1}$$

et l'intégrabilité découle de celle de  $f$ .

- 
4. — Solution 1 : Fixons  $A > 0$ . On a
- Pour tout  $x \geq 0$ ,  $a \mapsto \frac{\sin ax}{e^x - 1}$  est continue sur  $[-A, A]$ .
  - Pour tout  $x \geq 0$ , pour tout  $a \in [-A, A]$ , on a

$$\left| \frac{\sin ax}{e^x - 1} \right| \leq \frac{|ax|}{|e^x - 1|} = |a| \frac{x}{e^x - 1} \leq A \frac{x}{e^x - 1} = Af(x).$$

—  $\int_{\mathbb{R}_+} Af(x) d\lambda(x) < +\infty$  d'après la question précédente.

D'après le théorème de continuité sous le signe intégral,  $F$  est continue sur  $[-A, A]$ . Comme la continuité est une propriété locale et que tout point de  $\mathbb{R}$  a un voisinage de la forme  $[-A, A]$ , on en déduit que  $F$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

- Solution 2 : Pour  $a, b$  dans  $\mathbb{R}$ , on a

$$\begin{aligned} |F(a) - F(b)| &= \left| \int_{\mathbb{R}_+} \frac{(\sin(ax) - \sin(bx))}{e^x - 1} d\lambda(x) \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}_+} \left| \frac{(\sin(ax) - \sin(bx))}{e^x - 1} \right| d\lambda(x) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}_+} \frac{|ax - bx|}{e^x - 1} d\lambda(x) \\ &\leq C|a - b|, \end{aligned}$$

avec  $C = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{x}{e^x - 1} d\lambda(x) < +\infty$ . Ceci montre que  $F$  est  $C$ -lischitzienne.

En particulier, elle est uniformément continue sur  $\mathbb{R}$ .

5. Pour  $x = 0$ , la suite  $f_n^a(x)$  est identiquement nulle. Sinon, pour  $x > 0$ , on reconnaît la suite des sommes partielles de la série géométrique de premier terme  $\sin(ax)e^{-x}$  et de raison  $e^{-x}$  avec  $0 \leq e^{-x} < 1$  : la limite lorsque  $n$  tend vers l'infini est

$$\sin(ax)e^{-x} \frac{1}{1 - e^{-x}}.$$

Dans tous les cas  $f_n^a(x)$  tend vers  $\sin(ax)e^{-x} \frac{1}{1 - e^{-x}}$ .

6. On a simplement

$$\begin{aligned} |f_n^a(x)| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} |\sin(ax)e^{-(k+1)}| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} |ax|e^{-(k+1)} \\ &\leq |a| \sum_{k=0}^{+\infty} xe^{-(k+1)} = |a| \frac{xe^{-x}}{1 - e^{-x}} = |a|f(x) \end{aligned}$$

Comme  $|a|f$  est intégrable, on obtient par le théorème de convergence dominée que la limite des intégrales est l'intégrale de la limite, soit  $F(a)$ .

7. On a

$$f_n^a(x) = \Im \left( \sum_{k=0}^{n-1} e^{iax} e^{-(k+1)x} \right) = \Im \left( \sum_{k=0}^{n-1} e^{-(k+1-ia)x} \right)$$

La fonction  $x \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} e^{-(k+1-ia)x}$  est intégrable comme somme de  $n$  fonctions intégrables (voir la question 1) et l'intégrale de la somme est la somme des intégrales :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1-ia} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k-ia}.$$

L'intégrale de  $f_n^a$  en est la partie imaginaire, soit

$$\begin{aligned} \Im \sum_{k=1}^n \frac{1}{k-ia} &= \Im \sum_{k=1}^n \frac{k+ia}{k^2+a^2} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{a}{k^2+a^2}, \end{aligned}$$

d'où le résultat voulu avec la question précédente.

8. L'expression de la série donne  $F(a) = 0$ , et

$$\frac{F(a) - F(0)}{a} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + a^2}.$$

On peut considérer cette somme comme une intégrale par rapport à la mesure de comptage. Si on pose

$$\phi(a) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + a^2} = \int_{\mathbb{N}^*} \frac{1}{k^2 + a^2} dC(\mathbb{N}),$$

on sait que

- Pour tout  $k \geq 1$   $a \mapsto \frac{1}{k^2+a^2}$  est continue.
- Pour tout  $k \geq 1$ , pour tout  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\frac{1}{k^2+a^2} \leq \frac{1}{k^2}$
- 

$$\int_{\mathbb{N}^*} \frac{1}{k^2} dC_{\mathbb{N}^*}(k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} < +\infty.$$

D'après le théorème de continuité sous le signe intégral,  $\phi$  est continue, en particulier  $\lim_{a \rightarrow 0} \phi(a) = \phi(0) = \frac{\pi^2}{6}$ , soit

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{F(a) - F(0)}{a} = \frac{\pi^2}{6},$$

ce qui signifie que  $F$  est dérivable en 0, avec  $F'(0) = \frac{\pi^2}{6}$ .