Licence 3

Intégration et Probabilités

correction du devoir surveillé du 3 novembre 2016

****

Rappel du sujet

Dans tout le sujet, on pourra utiliser sans démonstration l'identité

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 1. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré. On suppose que T est une application $(\Omega, \mathcal{F}) - (\Omega, \mathcal{F})$ mesurable.

1. Montrer que l'application

$$A \mapsto \frac{1}{2}\mu(A) + \mu(T^{-1}(A)).$$

   définit une mesure sur $(\Omega, \mathcal{F})$. On note ν cette mesure.
2. On prend $(\Omega, \mathcal{F}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, où λ est la mesure de Lebesgue et pour T l'application $T(x) = 2x$. Justifier la mesurabilité de T. Soit $I = [a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, avec $-\infty < a < b < +\infty$. Calculer $\nu(I)$, puis identifier ν.

Exercice 2. On note $\Omega = \mathbb{N}^*$, que l'on munit de la tribu $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ et de la mesure de comptage $C_{\mathbb{N}^*}$. Pour $s > 1$, on pose

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s} < +\infty.$$

1. Soit $s > 1$. On note μ_s la mesure sur $(\Omega, \mathcal{F})$ dont la densité par rapport à la mesure de comptage $C_{\mathbb{N}^*}$ est

$$i \mapsto \frac{1}{\zeta(s)} \frac{1}{i^s}.$$

   En particulier,

$$\forall i \in \mathbb{N}^* \quad \mu_s(\{i\}) = \frac{1}{\zeta(s)} \frac{1}{i^s},$$

   ce que l'on ne demande pas de démontrer. Vérifier que μ_s est une mesure de probabilité.
   Soit p un entier naturel non-nul. Montrer que $\mu_s(p\mathbb{N}^*) = \frac{1}{p^s}$.

2. On note $C = \{n^2; n \in \mathbb{N}^*\}$ l'ensemble des carrés non nuls. Calculer $\mu_s(C|2\mathbb{N}^*)$. (On exprimera le résultat à l'aide de la fonction ζ.)
3. Pour n entier naturel non nul, on pose $f(n) = \frac{n}{n+1}$. La fonction f est-elle intégrable par rapport à μ_s ?
4. Calculer $\int_\Omega f \, d\mu_2$.

Exercice 3. 1. Soit $z = c + id$ un nombre complexe, avec $c > 0$ et $d \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $t \mapsto e^{-zt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par rapport à la mesure de Lebesgue et que $\int_{\mathbb{R}_+} e^{-zt} \, d\lambda(t) = \frac{1}{z}$.

2. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{x}{e^x-1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
3. En déduire que, pour tout réel a, la fonction $x \mapsto \frac{\sin ax}{e^x-1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
4. On pose, pour a un réel quelconque

$$F(a) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sin ax}{e^x - 1} \, d\lambda(x).$$

   Soit A un réel quelconque. Montrer que F est continue sur $]-A, A[$, puis qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$.
5. Soit a un réel quelconque. Étudier la convergence de la suite de fonctions définies par $f_n^a(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin(ax)e^{-(k+1)x}$.
6. Montrer que $\int_{\mathbb{R}} f_n^a(x) \, d\lambda(x)$ tend vers $F(a)$ quand n tend vers l'infini.
7. En déduire $F(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2}$.
8. Montrer que F est dérivable en 0 et calculer cette dérivée.

[ans1]

Commentaires

Commentaires généraux

57 étudiants ont composé, il n'y a eu aucune copie blanche. Le sujet était un peu long, aussi le barème était-il sur 26,5. Les notes ont ensuite été multipliées par 1.25, puis arrondies au demi-entier le plus proche. Ainsi la meilleure note possible était de 33. La meilleure note observée est 26,25 ramenée à 20 ainsi que six autres notes. La médiane est de 7.5, le premier quartile de 13 et le troisième quartile de 4. La moyenne des notes (après écrétage à 20) est de 8,9.

Règle d'or Si l'on veut durablement progresser en mathématiques, il faut renoncer une bonne fois pour toutes à l'usage de la pensée magique. Un étudiant qui se veut mathématicien ne peut écrire que des choses dont il est absolument certain. Sans cela, il obtiendra parfois quelques points par chance, mais il est impossible de progresser en jouant à la roulette russe à chaque question. La peur de l'échec, le désir de satisfaire l'enseignant, ne doivent pas guider la plume. En aucun cas il ne faut utiliser des mots que l'on ne comprend pas, même si cela doit amener à ne pas répondre à certaines questions.

La rédaction La rédaction est encore parfois défaillante. Rappelons qu'une preuve se rédige classiquement sous la forme "prémisses, théorème, conclusion" ou "théorème, hypothèses, conclusion". L'énoncé du théorème ne peut être omis que si la référence précise est réputée évidente à la fois pour celui qui parle et celui qui lit (ou écoute). Le fait que le théorème ait un nom ne dispense pas de l'énoncer, particulièrement dans les cas où on donne communément le même nom à un théorème et à ses corollaires "immédiats", ou les cas où les hypothèses sont nombreuses.

Dans une copie, la seule manière de se dispenser de donner l'énoncé d'un théorème est d'en vérifier les hypothèses d'une manière suffisamment méthodique et transparente pour lever tout doute. Quant à la vérification des hypothèses, on ne peut jamais s'en abstraire. Le respect de ces règles, exigeantes, mais simples, doit permettre de gagner de nombreux points, par la double élimination des erreurs grossières crées par la panique et des imprécisions. Des entorses à ses règles peuvent exister (je ne saurais jurer que le présent corrigé en soit exempt), cependant il faut être conscient que tout écart à la règle rend le candidat dépendant des états d'âme, imprévisibles, du correcteur.

Quelques points plus précis

— Exercice 1 : si de nombreuses copies ont pensé à utiliser que l'ensemble des mesures était stable par addition ou multiplication par une constante positive, très peu ont remarqué que $A \mapsto \mu(T^{-1}(A))$ était la mesure image de μ par T, ce qui dispensait alors de refaire une preuve laissée en exercice dans le polycopié, et exposée en cours. Nombreux sont qui pensent pouvoir montrer que $\mu_T(\cup_{i\geq 1} A_i) = \sum_{i\geq 1} \mu_T(A_i)$ sans utiliser que les A_i sont disjoints. Il faut revoir cette preuve, très formatrice, qui pourrait bien d'ailleurs être posée à nouveau en examen.

— Exercice 2 : la question 1 avait été très traitée en TD. Elle a été pourtant l'objet d'erreurs terribles que le stress de l'examen peine à excuser. On a par exemple « déduit »de $\mu_s(\{i\}) = \zeta(s)^{-1} i^{-s}$ pour $i \geq 1$ l'identité insensée

$$\mu_s(p\mathbb{N}^*) = \zeta(s)^{-1}(p\mathbb{N})^{-s}.$$

Quelques copies ont utilisé des identité fantaisistes, genre

$$(\sum_{i\geq 1} a_i)/(\sum_{i\geq 1} b_i) = \sum_{i\geq 1} \frac{a_i}{b_i}.$$

Sur la question 2, beaucoup d'inattentions. Il s'agissait bien de calculer $\mu_s(C|2\mathbb{N}^*)$, pas $\mu_s(C \cap 2\mathbb{N}^*)$ ni $\mu_s(C\backslash 2\mathbb{N}^*)$.

— Exercice 3 : les identités, les propriétés, ont un domaine de validité. De l'identité $\int_{\mathbb{R}_+} e^{-ct}\, d\lambda(t) = \frac{1}{c}$ pour $c \in]0, +\infty[$ou du résultat $\lim_{t\to+\infty} e^{-ct} = 0$, on ne peut, sans argument supplémentaire, déduire quoi que ce soit pour c complexe. Certaines copies contiennent des inégalités sur des nombres complexes. C'est une erreur grave. Enfin, les écritures du type $[F(t)]_0^{+\infty}$ sont toujours sanctionnées tant que l'on n'a pas montré que F a une limite en l'infini.

Correction

Solution 1 1. Comme μ est une mesure et $\frac{1}{2} > 0$, $\frac{1}{2}\mu$ est une mesure. $A \mapsto \mu(T^{-1})$ est la mesure image de μ par T, notée μ_T dans le cours. Finalement, ν est une mesure comme somme de deux mesures.

2. T est continue sur $\mathbb{R}$, donc mesurable de $(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans lui-même. On a

$$\begin{aligned} T^{-1}([a,b]) &= \{x \in \mathbb{R}; 2x \in [a,b]\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}; a \leq 2x \leq b\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}; a/2 \leq x \leq b/2\} \\ &= [a/2, b/2], \end{aligned}$$

D'où $\mu_T([a,b]) = \lambda([a/2, b/2]) = \frac{b-a}{2}$, et finalement

$$\nu(I) = \frac{1}{2}(b-a) + \frac{b-a}{2} = b - a = \lambda(I).$$

Comme les intervalles $[a,b]$ forment un π-système qui engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et que $\mathbb{R} = \cup_{n\geq 1}[-n,n]$, on en déduit que $\nu = \lambda$.

Solution 2 1. Notons que $p\mathbb{N}^* = \overset{+\infty}{\underset{k=1}{\cup}} \{pk\}$. Bien sûr, la réunion est disjointe, donc

$$\begin{aligned}\mu_s(p\mathbb{N}^*) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_s(\{kp\}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(s)}\frac{1}{(kp)^s} \\ &= \frac{1}{\zeta(s)}\frac{1}{p^s}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^s} = \frac{1}{\zeta(s)}\frac{1}{p^s}\zeta(s) = \frac{1}{p^s}.\end{aligned}$$

En prenant $p = 1$, on a $\mu_s(\mathbb{N}^*) = 1$ et μ_s est bien une mesure de probabilité.

2. Notons que $C \cap 2\mathbb{N}^* = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \{4k^2\}$. Bien sûr, la réunion est disjointe, donc

$$\begin{aligned}\mu_s(C \cap 2\mathbb{N}^*) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_s(\{4k^2\}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(s)}\frac{1}{(4k^2)^s} \\ &= \frac{1}{\zeta(s)}\frac{1}{4^s}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{2s}} = \frac{1}{\zeta(s)}\frac{1}{4^s}\zeta(2s) = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}\frac{1}{4^s}.\end{aligned}$$

Finalement
$$\mu_s(C|2\mathbb{N}^*) = \frac{\mu_s(C \cap 2\mathbb{N}^*)}{\mu_s(2\mathbb{N}^*)} = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}\frac{1}{2^s}.$$

3. Comme la tribu de départ est $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$, toute fonction est mesurable. Comme $|f| \leq 1$, on a

$$\int_{\mathbb{N}^*} |f| \; d\mu_s \leq \int_{\mathbb{N}^*} 1 \; d\mu_s = \mu_s(\mathbb{N}^*) = 1 < +\infty,$$

donc f est bien intégrable.

4. On calcule une intégrale d'une fonction positive par rapport à une mesure à densité : on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{N}^*} f(n) \; d\mu_2(n) &= \int_{\mathbb{N}^*} f(n)\frac{1}{\zeta(2)}\frac{1}{n^2} \; dC_{\mathbb{N}^*}(n) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n+1}\frac{6}{\pi^2}\frac{1}{n^2} \\ &= \frac{6}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)} \\ &= \frac{6}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

On reconnaît une série télescopique :

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{N+1},$$

qui tend vers 1 lorsque N tend vers l'infini, d'où

$$\int_{\mathbb{N}^*} f(n)\ d\mu_2(n) = \frac{6}{\pi^2}.$$

Solution 3 1. Pour a, b réels, on a $|e^{a+ib}| = |e^a e^{ib}| = |e^a|.|e^{ib}| = e^a.1$ En particulier $|e^{-zt}| = e^{-ct}$, et

$$\int_{\mathbb{R}^+} |e^{-zt}|\ d\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}^+} e^{-ct}\ d\lambda(t) = \frac{1}{c} < +\infty,$$

donc $z \mapsto e^{-zt}$ est intégrable. On a

$$\int_{\mathbb{R}_+} e^{-zt}\ d\lambda(t) = \lim_{N\to+\infty} \int_{[0,N]} e^{-zt}\ d\lambda(t)$$

Or,

$$\int_{[0,N]} e^{-zt}\ d\lambda(t) = \int_0^N e^{-zt}\ dt = \frac{1-e^{-zN}}{z}.$$

Comme $|e^{-zN}| = e^{-cN} \to 0$ quand $N \to +\infty$, on a

$$\int_{\mathbb{R}_+} e^{-zt}\ d\lambda(t) = \frac{1}{z}.$$

2. — Solution 1 : La fonction $f : x \mapsto \frac{x}{e^x-1}$ est clairement continue sur $]0, +\infty[$. En 0, $e^x = 1 + x + o(x)$, donc $e^x - 1 \sim x$ et $\frac{x}{e^x-1} \sim 1$: f admet un prolongement par continuité en 0 : l'intégrale est donc « faussement impropre »en 0. La fonction est donc localement intégrable sur $\mathbb{R}_+$, seul le comportement à l'infini reste à étudier. Or $\frac{x}{e^x-1} = \frac{1}{e^{x/2}} \frac{x}{e^{x/2}-e^{-x/2}}$. En l'infini $\frac{x}{e^{x/2}-e^{-x/2}} \sim \frac{x}{e^{x/2}}$ tend vers 0 avec les croissances comparées classiques. Ainsi $f(x) = o(e^{-x/2})$ en l'infini. Comme $x \mapsto e^{-x/2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit l'intégrabilité de f en l'infini, et finalement sur $\mathbb{R}_+$.
 — Solution 2 : Pour tout $x \geq 0$, on a $x \leq \sinh(x)$, et en particulier $x/2 \leq \sinh(x/2)$. Pour tout $x \geq 0$, $e^x \geq 1$. Ainsi

$$0 \leq \frac{x}{e^x-1} \leq \frac{2\sinh(x/2)}{e^x-1} = \frac{e^{x/2}-e^{-x/2}}{e^x-1} = e^{-x/2}.$$

 Comme $x \mapsto e^{-x/2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, le résultat s'ensuit.

3. D'après l'inégalité des accroissements finis, pour tout t réel, on a $|\sin t| \leq |t|$. En particulier, pour $x \geq 0$,

$$|\frac{\sin ax}{e^x-1}| \leq \frac{|ax|}{e^x-1} = |a|\frac{x}{e^x-1}$$

et l'intégrabilité découle de celle de f.

4. — Solution 1 : Fixons $A > 0$. On a
   — Pour tout $x \geq 0$, $a \mapsto \frac{\sin ax}{e^x - 1}$ est continue sur $[-A, A]$.
   — Pour tout $x \geq 0$, pour tout $a \in [-A, A]$, on a

$$|\frac{|\sin ax|}{|e^x - 1|} \leq \frac{|ax|}{|e^x - 1|} = |a|\frac{x}{e^x - 1} \leq A\frac{x}{e^x - 1} = Af(x).$$

   — $\int_{\mathbb{R}_+} Af(x)\, d\lambda(x) < +\infty$ d'après la question précédente.

   D'après le théorème de continuité sous le signe intégral, F est continue sur $[-A, A]$. Comme la continuité est une propriété locale et que tout point de $\mathbb{R}$ a un voisinage de la forme $[-A, A]$, on en déduit que F est continue sur $\mathbb{R}$.

   — Solution 2 : Pour a, b dans $\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
|F(a) - F(b)| &= |\int_{\mathbb{R}_+} \frac{(\sin(ax) - \sin(bx))}{e^x - 1}\, d\lambda(x)| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}_+} |\frac{(\sin(ax) - \sin(x))}{e^x - 1}|\, d\lambda(x) \\
&\leq \int_{\mathbb{R}_+} \frac{|ax - bx|}{e^x - 1}\, d\lambda(x) \\
&\leq C|a - b|,
\end{aligned}$$

   avec $C = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{x}{e^x - 1}\, d\lambda(x) < +\infty$. Ceci montre que F est C-lischitzienne. En particulier, elle est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

5. Pour $x = 0$, la suite $f_n^a(x)$ est identiquement nulle. Sinon, pour $x > 0$, on reconnait la suite des sommes partielles de la série géométrique de premier terme $\sin(ax)e^{-x}$ et de raison e^{-x} avec $0 \leq e^{-x} < 1$: la limite lorsque n tend vers l'infini est

$$\sin(ax)e^{-x}\frac{1}{1 - e^{-x}}.$$

   Dans tous les cas $f_n^a(x)$ tend vers $\sin(ax)e^{-x}\frac{1}{1 - e^{-x}}$.

6. On a simplement

$$\begin{aligned}
|f_n^a(x)| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} |\sin(ax)e^{-(k+1)}| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} ||ax|e^{-(k+1)} \\
&\leq |a|\sum_{k=0}^{+\infty} xe^{-(k+1)} = |a|\frac{xe^{-x}}{1 - e^{-x}} = |a|f(x)
\end{aligned}$$

   Comme $|a|f$ est intégrable, on obtient par le théorème de convergence dominée que la limite des intégrales est l'intégrale de la limite, soit $F(a)$.

7. On a

$$f_n^a(x) = \Im\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{iax}e^{-(k+1)x}\right) \qquad = \Im\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{-(k+1-ia)x}\right)$$

La fonction $x \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} e^{-(k+1-ia)x}$ est intégrable comme somme de n fonctions intégrables (voir la question 1) et l'intégrale de la somme est la somme des intégrales :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1-ia} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k-ia}.$$

L'intégrale de f_n^a en est la partie imaginaire, soit

$$\begin{aligned}\Im\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k-ia} &= \Im\sum_{k=1}^{n} \frac{k+ia}{k^2+a^2} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{a}{k^2+a^2},\end{aligned}$$

d'où le résultat voulu avec la question précédente.

8. L'expression de la série donne $F(a) = 0$, et

$$\frac{F(a)-F(0)}{a} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+a^2}.$$

On peut considérer cette somme comme une intégrale par rapport à la mesure de comptage. Si on pose

$$\phi(a) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2+a^2} = \int_{\mathbb{N}^*} \frac{1}{k^2+a^2}\ dC(\mathbb{N}),$$

on sait que

— Pour tout $k \geq 1$ $a \mapsto \frac{1}{k^2+a^2}$ est continue.

— Pour tout $k \geq 1$, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{k^2+a^2} \leq \frac{1}{k^2}$

—
$$\int_{\mathbb{N}^*} \frac{1}{k^2}\ dC_{\mathbb{N}^*}(k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} < +\infty.$$

D'après le théorème de continuité sous le signe intégral, ϕ est continue, en particulier $\lim_{a\to 0} \phi(a) = \phi(0) = \frac{\pi^2}{6}$, soit

$$\lim_{a\to 0} \frac{F(a)-F(0)}{a} = \frac{\pi^2}{6},$$

ce qui signifie que F est dérivable en 0, avec $F'(0) = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 1 8 points

Commentaires lors de partiel 2011:Cet exercice a été très mal réussi, plus de la moitié des copies obtenant la note zéro.

La première question demandait de rédiger de manière détaillée un raisonnement très fréquemment utilisé dans les calculs d'intégrales. Le résultat analogue est une évidence dans la théorie de l'intégrale de Riemann généralisée. Ce n'est pas le cas en théorie de Lebesgue, où il demande un petit raisonnement. On a ici rencontré beaucoup de confusions entre les deux théories, certains n'hésitant pas à affirmer (à tort !) qu'une fonction mesurable est toujours continue.

La deuxième question a eu à peine plus de succès, bien qu'elle ait déjà été traitée en TD. On a lu quelques horreurs comme "v_n tend vers 0 donc la série de terme général v_n converge", "$u_{n+1} - u_n$ tend vers 0 donc la suite u_n converge", ou encore "v_n est bornée, donc v_n converge". Il est très difficile de regagner la confiance du correcteur après avoir écrit de pareilles choses.

Seules les meilleures copies ont traité la troisième question. La majorité des étudiants auraient profit à refaire quelques exercices sur les fonctions "partie entière" et "partie fractionnaire", qui ne semblent pas familières au plus grand nombre.

1. On pose $f_n(x) = 1\!\!1_{]1/n,1]}(x)f(x)$. On a $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 1\!\!1_{]0,1]}(x)f(x)$ pour tout $x \in]0,1]$, donc $f_n(x)$ converge λ-presque partout vers $f(x)$ sur $[0,1]$. De plus, on a pour tout $x \in [0,1]$ et pour tout $n \geq 1$: $|f_n(x)| = 1\!\!1_{]1/n,1]}(x)|f(x)| \leq |f(x)|$. Comme $x \mapsto |f(x)|$ est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$, le théorème de convergence dominée nous dit que
$$\int_{[0,1]} f(x)\ d\lambda(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_{[0,1]} f_n(x)\ d\lambda(x).$$
Or $\int_{[0,1]} f_n(x)\ d\lambda(x) = \int_{[0,1]} 1\!\!1_{]1/n,1]}(x)f(x)\ d\lambda(x) = \int_{]1/n,1]}(x)f(x)\ d\lambda(x)$, d'où le résultat voulu. 2 points
2. Posons $u_n = H_n - \log n$. On a le comportement suivant
$$\begin{aligned} |u_n - u_{n-1}| &= |(H_n - H_{n-1}) - (\log n - \log(n-1))| \\ &= \left|\frac{1}{n} + \log(1 - 1/n)\right| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right| = O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$
Ainsi la série de terme général $u_n - u_{n-1}$ converge, mais on a la relation télescopique $\sum_{k=2}^{n} (u_n - u_{n-1}) = u_n - u_1$, donc la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge. Si on note γ la limite, on a $u_n = \gamma + o(1)$, soit
$$H_n = \log n + \gamma + o(1).$$
3 points

3. Posons

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \{\frac{1}{x}\}1\!\!1_{]1/n,1]}(x) = \frac{1}{x}1\!\!1_{]1/n,1]}(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \lfloor \frac{1}{x} \rfloor 1\!\!1_{]\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}]}(x) \\ &= \frac{1}{x}1\!\!1_{]1/n,1]}(x) - \sum_{k=1}^{n-1} k1\!\!1_{]\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}]}(x) \end{aligned}$$

f_n est une fonction continue par morceaux, donc mesurable. Pour tout x de $]0,1]$, $f_n(x)$ tend vers $f(x) = \{\frac{1}{x}\}$, qui est donc aussi une fonction mesurable. Comme f est bornée par 1, l'intégrale existe. D'après la question 1), l'intégrale de f sur $]0,1]$ est la limite de $\int_{]1/n,1]} f \, d\lambda = \int_{]0,1]} f_n \, d\lambda$. Or,

$$\begin{aligned} \int_{]0,1]} f_n \, d\lambda &= \int_{1/n}^{1} \frac{dx}{x} - \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} k \, dx \\ &= \log n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \\ &= \log n - H_n + 1 \end{aligned}$$

On sait que $H_n - \log n$ admet une limite γ lorsque n tend vers l'infini, appelée . On en déduit que $\int_{]0,1]}\{\frac{1}{x}\} \, d\lambda(x) = 1 - \gamma$.3 points

Exercice 2 6 points

1. X est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ donc $Y = s(X)$ est à valeurs dans $s(\mathbb{R}_+) = \mathbb{N}*$. Il s'agit donc, pour tout $k \in \mathbb{N}*$, de déterminer la valeur de $P(Y = k)$. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = k) &= \mathbb{P}(s(X) = k) \\ &= \mathbb{P}(X \in [k-1, k[) \\ &= \mathbb{P}_X([k-1, k[) \\ &= \int_{[k-1,k[} d\mathbb{P}_X(t) \\ &= \int_{[k-1,k[} \lambda e^{-\lambda t} d\lambda(t) \\ &= \int_{k-1}^{k} \lambda e^{-\lambda t} dt \\ &= e^{-\lambda(k-1)} - e^{-\lambda k} \\ &= (1 - e^{-\lambda})\big(e^{-\lambda}\big)^{k-1}, \end{aligned}$$

donc Y suit une loi géométrique de paramètre $1 - e^{-\lambda}$.3 points

2. X prend des valeurs entières de 0 à 2016. Donc, d'après le théorème de transfert, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(-2)^k &= \sum_{k=0}^{2016}(-2)^k P(X=k)\\ &= \sum_{k=0}^{2016}\binom{2016}{k}\frac{1}{2^{2016}}(-2)^k\\ &= \frac{1}{2^{2016}}\sum_{k=0}^{2016}\binom{2016}{k}(-2)^k(1)^{2016-k}\\ &= \frac{1}{2^{2016}}(-2+1)^{2016}\\ &= \frac{1}{2^{2016}}\end{aligned}$$

1 points

3. Une variable aléatoire suivant la loi de Rademacher ne prend qu'un nombre fini de valeurs donc est intégrable. On a

$$\mathbb{E}(X_k) = 1\mathbb{P}(X_k = 1) + (-1)\mathbb{P}(X_k = -1) = \frac{1-1}{2} = 0.$$

Par linéarité, $\mathbb{E}(k+X_k) = k+\mathbb{E}(X_k) = k$. Comme les X_k sont indépendantes, les $k + X_k$ aussi. Or un produit de variable aléatoires intégrables est intégrable et l'espérance du produit est le produit des espérances : on a donc

$$\mathbb{E}(Z) = \prod_{k=1}^{99}\mathbb{E}(k+X_k) = \prod_{k=1}^{99} k = 99!$$

2 points

Exercice 3 15 points

Commentaires lors de partiel 2011:Quelques remarques :

— L'erreur suivante a été fréquemment rencontrée dans la première question : du développement asymptotique $\cos t = 1-\frac{t^2}{2}+o(t^2)$, de nombreux étudiants croient pouvoir déduire que pour tout $t \geq 0$, $\cos t \leq 1-\frac{t^2}{2}$. Il faut retenir qu'un développement asymptotique en $o()$ au voisinage de 0 traduit l'existence d'une limite pour une certaine quantité : on peut, certes, en déduire des inégalités, mais sur un voisinage de 0 dont on ne connait pas l'amplitude : de $f(t) = \frac{t^2}{2}+o(t^2)$, je peux déduire par exemple qu'il existe M tel que

$$\forall t \in [-M, M] \quad f(t) \leq t^2,$$

mais je ne peux donner *a priori* de contrôle sur M.
Par exemple, si $f(t) = f_K(t) = \frac{t^2}{2} + K|t|^3$, j'ai bien $f_K(t) = \frac{t^2}{2} + o(t^2)$, mais je n'ai l'inégalité $f(t) \leq t^2$ que pour $t \in [-\frac{1}{2K}, \frac{1}{2K}]$.

— L'énoncé de la deuxième question a parfois été mal compris : certains s'arrêtent après avoir dit que la fonction que l'on souhaite intégrer est mesurable et positive. Il est vrai que dans ce cas, l'intégrale a toujours un sens si l'on admet qu'elle puisse valoir $+\infty$, mais dans le contexte, il était attendu que l'on montre (à un moment ou à un autre) que la valeur de l'intégrale était finie.

— À la question 6, plusieurs étudiants ont cru pouvoir calculer F à partir de sa dérivée. Rappelons que si $F' = f$ sur un intervalle I et que G est une primitive de f sur I, alors il existe une constance C telle que $F(x) = G(x) + C$ pour tout $x \in I$, mais C n'est pas forcément nul.

— Il faut revoir les théorèmes sur les intégrales dépendant d'un paramètre, en particulier le théorème de dérivabilité.
Certains étudiants croient qu'ils suffit de vérifier l'intégrabilité de $\frac{\partial}{\partial x} f(x,t)$ pour avoir la dérivabilité de $x \mapsto \int \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\ d\lambda(t)$. D'autres, ont bien compris qu'il faut trouver g avec $|\frac{\partial}{\partial x} f(x,t)| \leq g(t)$, mais négligent de vérifier l'intégrabilité de g, voire l'affirment contre toute évidence. On a ainsi parfois lu que $t \mapsto \frac{1}{t}$ était intégrable sur $]0,+\infty[$, ou, plus grave, que la fonction constante égale à 1 l'était.

— Établir des inégalités utiles est encore une grosse difficulté pour la grande majorité des étudiants. Il faut se familiariser avec les inégalités classiques et de ne plus se tromper sur le sens des inégalités, par exemple il faut être capable de dire sans hésitation que si $b \geq a$ et $x > 0$, alors $e^{-bx} \leq e^{-ax}$ et non l'inverse. Seule la pratique intensive des exercices, crayon en main, permet de progresser.

1. Pour tout $t \geq 0$, on a $-1 \leq \cos t \leq 1$, ce qui entraîne évidemment $0 \leq 1 - \cos t \leq 2$. Pour $x \geq 0$ $\sin x = \int_0^x \cos u\ du \leq \int_0^x 1\ du = x$, puis $1 - \cos t = \int_0^t \sin x\ dx \leq \int_0^t x\ dx = \frac{t^2}{2}$.
   On a donc bien $0 \leq 1 - \cos t \leq \min(\frac{t^2}{2}, 2)$, d'où $\frac{1-\cos t}{t} \leq \min(\frac{t}{2}, \frac{2}{t})$. Si $t \geq 2$, $\frac{2}{t} \leq 1$, sinon $\frac{t}{2} \leq 1$. Dans les deux cas $\min(\frac{t}{2}, \frac{2}{t}) \leq 1$ et donc $0 \leq \frac{1-\cos t}{t} \leq 1$. 2 points
2. Soit $x > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{1-\cos t}{t} e^{-xt}$ est continue sur $]0,+\infty[$, donc mesurable par rapport à la tribu borélienne.
   Comme $|\frac{1-\cos t}{t} e^{-xt}| = \frac{1-\cos t}{t} e^{-xt} \leq e^{-xt}$ et que $\int_{]0,+\infty[} e^{-xt}\ d\lambda(t) = \frac{1}{x} < +\infty$, la fonction $t \mapsto \frac{1-\cos t}{t} e^{-xt}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ par rapport à la mesure de Lebesgue. 1 points
3. Soit $a > 0$. On a $\frac{\partial}{\partial x} \frac{1-\cos t}{t} e^{-xt} = -(1-\cos t)e^{-xt}$, donc

$$\forall x \in]a,+\infty[\quad \forall t \in]0,+\infty[\quad |\frac{\partial}{\partial x} \frac{1-\cos t}{t} e^{-xt}| = (1-\cos t)e^{-xt} \leq 2e^{-at}.$$

   Comme $\int_{]0,+\infty[} 2e^{-at}\ d\lambda(t) = \frac{2}{a} < +\infty$, le théorème de dérivation sous le signe intégrale nous donne la dérivabilité de F sur $]a,+\infty[$, avec

$$F'(x) = \int_{]0,+\infty[} (\cos t - 1)e^{-xt}\ d\lambda(t) = \int_{]0,+\infty[} \cos t\ e^{-xt}\ d\lambda(t) - \frac{1}{x}.$$

Comme $|e^{it}e^{-tx}| = e^{-tx}$, la fonction $t \mapsto e^{it}e^{-tx}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$:

$$\begin{aligned}\int_{]0,+\infty[} e^{it}e^{-tx}\ d\lambda(t) &= \lim_{M\to+\infty} \int_{]0,M[} e^{it}e^{-tx}\ d\lambda(t)\\ &= \lim_{M\to+\infty} \frac{1-e^{(i-x)M}}{x-i}\\ &= \frac{1}{x-i}\\ &= \frac{x+i}{x^2+1}\end{aligned}$$

On en déduit

$$\Re \int_{]0,+\infty[} e^{it}e^{-tx}\ d\lambda(t) = \frac{x}{x^2+1},$$

soit

$$\int_{]0,+\infty[} \cos t e^{-tx}\ d\lambda(t) = \frac{x}{x^2+1},$$

et finalement $F'(x) = \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x}$ pour tout $x \in]a,+\infty[$. Comme tout $x > 0$ admet un voisinage de la forme $]a,+\infty[$ pour un certain $a > 0$ (par exemple $a = x/2$) , la dérivabilité de F sur $]0,+\infty[$ s'ensuit. 3 points

4. $0 \le \frac{1-\cos t}{t}e^{-nt} \le e^{-nt}$, donc en intégrant $0 \le F(n) \le \frac{1}{n}$, ce qui entraîne $\lim\limits_{n\to+\infty} F(n) = 0$. Comme $F'(x) = \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x} = \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x}$, une primitive de F sur $]0,+\infty[$ est

$$\frac{1}{2}\log(x^2+1) - \log x = \frac{1}{2}(\log(x^2+1) - \log x^2) = \frac{1}{2}\log(1+x^{-2}),$$

donc il existe K réel tel que

$$\forall x > 0 \quad F(x) = \frac{1}{2}\log(1+x^{-2}) + K.$$

En faisant $x = n$ et en faisant tendre n vers l'infini, on obtient $K = 0$, soit

$$\forall x > 0 \quad F(x) = \frac{1}{2}\log(1+x^{-2}).$$

2 points

5. Comme précédemment $t \mapsto \frac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt}$ est positive, continue, majorée par $t \mapsto e^{-xt}$, donc intégrable. Ainsi G est bien définie.

On a $\frac{\partial}{\partial x}\frac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt} = -\frac{1-\cos t}{t}e^{-xt}$, donc

$$\forall x \in]a, +\infty[\quad \forall t \in]0, +\infty[\quad |\frac{\partial}{\partial x}\frac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt}| = \frac{1-\cos t}{t}e^{-xt} \le e^{-at}.$$

Comme $\int_{]0,+\infty[} e^{-at}\ d\lambda(t) = \frac{1}{a} < +\infty$, le théorème de dérivation sous le signe intégrale nous donne la dérivabilité de G sur $]a, +\infty[$, avec

$$G'(x) = -\int_{]0,+\infty[} \frac{1-\cos t}{t}e^{-xt}\ d\lambda(t) = -F(x).$$

2 points

6. On trouve une primitive de F grâce à une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{2}\log(1+x^{-2})\ dx &= \frac{1}{2}x\log(1+x^{-2}) - \int \frac{x}{2}\frac{-2x^{-3}}{1+x^{-2}}\ dx \\ &= \frac{1}{2}x\log(1+x^{-2}) + \int \frac{1}{1+x^2}\ dx \\ &= \frac{x}{2}\log(1+x^{-2}) + \mathrm{atan} x \end{aligned}$$

Comme $G' = -F$, on en déduit qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x > 0 \quad G(x) = C - \frac{x}{2}\log(1+x^{-2}) - \mathrm{atan}\ x.$$

1 points

7. Comme précédemment, on montre $0 \le G(x) \le \frac{1}{x}$, donc

$\lim_{x\to+\infty} G(x) = 0$.

En $+\infty$, $\log(1+x^{-2}) \sim x^{-2}$, donc $-\frac{x}{2}\log(1+x^{-2}) \sim -\frac{1}{2x}$ et a donc une limite nulle en l'infini. Comme la fonction arctangente a une limite $\pi/2$ en l'infini, on a $\lim_{x\to+\infty} C - \frac{x}{2}\log(1+x^{-2}) - \mathrm{atan}\ x = C - \frac{\pi}{2}$, d'où $C = \frac{\pi}{2}$. 1 points

8.
$$\forall x \ge 0 \quad \forall t \in]0,1] \quad 0 \le \frac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt} \le 1.1 = 1$$

$$\text{et } \forall x \ge 0 \quad \forall t > 1 \quad 0 \le \frac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt} \le \frac{1}{t^2}.1 = \frac{1}{t^2}$$

Ainsi

$$\forall x \ge 0 \quad \forall t > 0 \quad 0 \le \frac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt} \le 1\!\!1_{[0,1]}(t) + 1\!\!1_{]1,+\infty[}\frac{1}{t^2}.$$

Comme pour tout $t > 0$, l'application $x \mapsto \frac{1-\cos t}{t^2} e^{-xt}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et que

$$\int_{]0,+\infty[} 1\!\!1_{[0,1]}(t) + 1\!\!1_{]1,+\infty[} \frac{1}{t^2} \, d\lambda(t) = 1 + 1 = 2 < +\infty,$$

le théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre nous dit que $x \mapsto \int_{]0,+\infty[} \frac{1-\cos t}{t^2} e^{-xt} \, d\lambda(t)$ est continue. En particulier

$$\int_{]0,+\infty[} \frac{1-\cos t}{t^2} \, d\lambda(t) = \lim_{x \to 0^+} \int_{]0,+\infty[} \frac{1-\cos t}{t^2} e^{-xt} \, d\lambda(t) = \lim_{x \to 0^+} G(x).$$

Évaluons cette limite : on a pour $x > 0$

$$G(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \log(\frac{x^2+1}{x^2}) - \text{atan } x = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \log(1+x^2) + x \log x - \text{atan } x.$$

Comme $\lim_{x \to 0^+} x \log x = 0$, on obtient $\lim_{x \to 0^+} G(x) = \frac{\pi}{2}$, soit

$$\int_{]0,+\infty[} \frac{1-\cos t}{t^2} \, d\lambda(t) = \frac{\pi}{2}.$$

Comme $\frac{1-\cos t}{t^2}$, est continue, positive, intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue, l'intégrale de Riemann impropre existe aussi et coïncide : on a ainsi

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} \, dt = \frac{\pi}{2}.$$

3 points