Licence 3

Intégration et Probabilités

Devoir surveillé du 3 novembre 2016

durée 2h

****

Les calculatrices et les documents sont interdits.

ON SERA TRÈS VIGILANT À LA QUALITÉ DE LA RÉDACTION.

****

Dans tout le sujet, on pourra utiliser sans démonstration l'identité

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 1

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré. On suppose que T est une application $(\Omega, \mathcal{F}) - (\Omega, \mathcal{F})$ mesurable.

1. Montrer que l'application
$$A \mapsto \frac{1}{2}\mu(A) + \mu(T^{-1}(A)).$$
définit une mesure sur $(\Omega, \mathcal{F})$. On note ν cette mesure.
2. On prend $(\Omega, \mathcal{F}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, où λ est la mesure de Lebesgue et pour T l'application $T(x) = 2x$. Justifier la mesurabilité de T. Soit $I = [a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, avec $-\infty < a < b < +\infty$. Calculer $\nu(I)$, puis identifier ν.

Exercice 2

On note $\Omega = \mathbb{N}^*$, que l'on munit de la tribu $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ et de la mesure de comptage $C_{\mathbb{N}^*}$. Pour $s > 1$, on pose

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s} < +\infty.$$

1. Soit $s > 1$. On note μ_s la mesure sur $(\Omega, \mathcal{F})$ dont la densité par rapport à la mesure de comptage $C_{\mathbb{N}^*}$ est
$$i \mapsto \frac{1}{\zeta(s)} \frac{1}{i^s}.$$
En particulier,
$$\forall i \in \mathbb{N}^* \quad \mu_s(\{i\}) = \frac{1}{\zeta(s)} \frac{1}{i^s},$$
ce que l'on ne demande pas de démontrer. Vérifier que μ_s est une mesure de probabilité.
Soit p un entier naturel non-nul. Montrer que $\mu_s(p\mathbb{N}^*) = \frac{1}{p^s}$.
2. On note $C = \{n^2; n \in \mathbb{N}^*\}$ l'ensemble des carrés non nuls. Calculer $\mu_s(C|2\mathbb{N}^*)$. (On exprimera le résultat à l'aide de la fonction ζ.)
3. Pour n entier naturel non nul, on pose $f(n) = \frac{n}{n+1}$. La fonction f est-elle intégrable par rapport à μ_s ?
4. Calculer $\int_\Omega f \, d\mu_2$.

Exercice 3

1. Soit $z = c + id$ un nombre complexe, avec $c > 0$ et $d \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $t \mapsto e^{-zt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par rapport à la mesure de Lebesgue et que $\int_{\mathbb{R}_+} e^{-zt} \, d\lambda(t) = \frac{1}{z}$.
2. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
3. En déduire que, pour tout réel a, la fonction $x \mapsto \frac{\sin ax}{e^x - 1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
4. On pose, pour a un réel quelconque
$$F(a) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sin ax}{e^x - 1} \, d\lambda(x).$$
Soit A un réel quelconque. Montrer que F est continue sur $]-A, A[$, puis qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$.
5. Soit a un réel quelconque. Étudier la convergence de la suite de fonctions définies par $f_n^a(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin(ax) e^{-(k+1)x}$.
6. Montrer que $\int_{\mathbb{R}} f_n^a(x) \, d\lambda(x)$ tend vers $F(a)$ quand n tend vers l'infini.
7. En déduire $F(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2}$.
8. Montrer que F est dérivable en 0 et calculer cette dérivée.

FIN