Licence 3

Intégration et Probabilités

Devoir surveillé du 12 novembre 2015

durée 2h

****

Les calculatrices et les documents sont interdits.

ON SERA TRÈS VIGILANT À LA QUALITÉ DE LA RÉDACTION.

****

Exercice 1. *Intégrale de Wallis de deuxième espèce*
Pour $n \geq 1$, on pose
$$\mathcal{W}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n \, dx.$$

1. Montrer que pour tout $x \in]0, \pi/2]$, on a $\sin x < x$.
2. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathcal{W}_n = 0$.
3. Pour $x \in]0, \pi/2]$, on pose $\phi(x) = -\frac{1}{x^2} \log \frac{\sin x}{x}$. Montrer que ϕ admet un prolongement continu sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$. Dans la suite, on notera encore ϕ ce prolongement.
4. Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on ait l'inégalité $\phi(x) \geq A$.
5. Par un changement de variables bien choisi, montrer que
$$\mathcal{W}_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\frac{\pi}{2}\sqrt{n}} \left(\frac{\sin(y/\sqrt{n})}{(y/\sqrt{n})}\right)^n \, dy = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\mathbb{R}_+} f_n(y) \, d\lambda(y),$$
avec $f_n(y) = \mathbb{1}_{[0, \frac{\pi}{2}\sqrt{n}]}(y) e^{-y^2 \phi(y/\sqrt{n})}$.
6. Montrer enfin l'existence d'une constante K telle que $\mathcal{W}_n \sim \frac{K}{\sqrt{n}}$.

Exercice 2. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, on pose

$$I_n(x) = \int_{\mathbb{R}} u^n \exp(-xu^2) \exp\left(i\frac{u^3}{3}\right)\, d\lambda(u).$$

1. Vérifier que la fonction I_n est bien définie sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que pour n pair, la fonction I_n prend des valeurs réelles.
3. (a) Montrer que pour tout $x > 0$,

$$I_0(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-y^2) \exp\left(i\frac{(y/\sqrt{x})^3}{3}\right)\, d\lambda(y).$$

   (b) Montrer qu'il existe une constante C telle qu'on ait l'équivalent en l'infini

$$I_0(x) \sim \frac{C}{\sqrt{x}}.$$

   Indication : on pourra prendre une suite (x_n) de réels strictement positifs avec $\lim x_n = +\infty$ et considérer la suite $(\sqrt{x_n} I(x_n))_{n \geq 1}$.
4. Soit $a > 0$. Montrer que I_n est dérivable sur $]a, +\infty[$, avec

$$\forall x \in]a, +\infty[\quad I_n'(x) = -I_{n+2}(x).$$

   I_n est-elle dérivable sur $]0, +\infty[$?
5. À l'aide d'une intégration par parties, montrer soigneusement que

$$\begin{aligned} \forall n \geq 1 \quad \forall x \in]0, +\infty[\quad & I_{n+2}(x) = i(nI_{n-1}(x) - 2xI_{n+1}(x)) \\ \text{et } \forall x \in]0, +\infty[\quad & I_2(x) = -2ixI_1(x)). \end{aligned}$$

6. En déduire que I_0 est une solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle (de variable x)

$$y'' = (4x^2 + \frac{1}{x})y' + 2xy.$$

7. Hors barème. Question assez calculatoire, plutôt à chercher chez vous. On pose $\mathrm{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi} \exp(-\frac{2}{3}x^{3/2}) I_0(\sqrt{x})$. Montrer que la fonction $\mathrm{Ai}(x)$ est une solution de l'équation différentielle d'Airy $y'' = xy$ qui est bornée au voisinage de l'infini.

FIN

Licence 3

Intégration et Probabilités

Devoir surveillé du 12 novembre 2015

Correction et commentaires

Commentaires généraux

50 étudiants ont composé, une seule copie ne montre pas de trace de recherche. Le sujet était un peu long, aussi le barème était-il sur 30. Les notes ont ensuite été multipliées par 1.2, puis arrondies au demi-entier le plus proche. Ainsi la meilleure note possible était de 36. La meilleure note observée est 33,5 ramenée à 20 ainsi que 29.5,28,24,20,5. La médiane est de 7.5, le premier quartile de 12,5 et le troisième quartile de 4,5. La moyenne des notes (après écrétage à 20) est de 9,08.

Règle d'or Si l'on veut durablement progresser en mathématiques, il faut renoncer une bonne fois pour toutes à l'usage de la pensée magique. Un étudiant qui se veut mathématicien ne peut écrire que des choses dont il est absolument certain. Sans cela, il obtiendra parfois quelques points par chance, mais il est impossible de progresser en jouant à la roulette russe à chaque question. La peur de l'échec, le désir de satisfaire l'enseignant, ne doivent pas guider la plume, comme chez cet étudiant qui, dans l'espoir d'appliquer le théorème monotone, écrit que la suite $((\frac{\sin x}{x})^n)_{n\geq 1}$ est croissante, alors même qu'il a montré que $0 \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$, ou ceux, nombreux, qui affirment que $\frac{1}{x^n}$ est intégrable sur $]0, \pi/2[$ pour tout $n \geq 1$ en vue d'appliquer le théorème de convergence dominée.

La rédaction La rédaction est encore parfois défaillante. Rappelons qu'une preuve se rédige classiquement sous la forme "prémisses, théorème, conclusion" ou "théorème, hypothèses, conclusion". L'énoncé du théorème ne peut être omis que si la référence précise est réputée évidente à la fois pour celui qui parle et celui qui lit (ou écoute). Le fait que le théorème ait un nom ne dispense pas de l'énoncer, particulièrement dans les cas où on donne communément le même nom à un théorème et à ses corollaires “immédiats”, ou les cas où les hypothèses sont nombreuses.

Dans une copie, la seule manière de se dispenser de donner l'énoncé d'un théorème est d'en vérifier les hypothèses d'une manière suffisamment méthodique et transparente pour lever tout doute. Quant à la vérification des hypothèses, on ne peut jamais s'en abstraire. Le respect de ces règles, exigeantes, mais simples, doit permettre de gagner de nombreux points, par la double élimination des erreurs grossières crées par la panique et des imprécisions. Des entorses à ses règles peuvent exister (je ne saurais jurer que le présent corrigé en soit exempt), cependant il faut être conscient que tout écart à la règle rend le candidat dépendant des états d'âme, imprévisibles, du correcteur.

Quelques points plus précis

— La première question demandait d'établir l'inégalité stricte $\sin x < x$ sur $]0, \pi/2[$. Il suffisait de montrer que l'application $x \mapsto x - \sin x$ est strictement croissante sur $[0, \pi/2[$ ou d'utiliser l'égalité des accroissements finis. Sur les 50 copies, on observe 13 succès, 20 succès partiels. Sont comptés comme succès partiels des preuves de l'inégalité large. Il était attendu que tout le monde ne réussirait pas à établir l'inégalité stricte. On regrette toutefois qu'un grand nombre des candidats ayant seulement réussis à démontrer l'inégalité large annoncent l'inégalité stricte. Confusion regrettable ou vaine tentative de bluff ?
Il faut savoir démontrer ce genre d'inégalité classique $\sin(x) \leq x$, $\cos(x) \geq 1-x^2/2$, $\log(1+x) \leq x$, et dans l'idéal, il faudrait également, à force de pratique, finir par en mémoriser quelques-unes.

— Les difficultés les plus souvent constatées remontent au programme des deux premières années : seules 10 personnes parviennent à mener parfaitement à bien un développement limité d'ordre 2. On observe des difficultés dans la compréhension des méthodes (utilisation de règles de calcul fautives), ainsi que dans la mémorisation des développements usuels. Pour progresser, il faut pratiquer.

— On a lu parfois “un produit de fonctions intégrables est intégrables”. C'est vrai pour l'intégrale de Riemann [1], mais pas pour l'intégrale de Lebesgue. En réalité, je pense que les élèves qui écrivent cela se réfèrent plutôt au mantra “un produit/une somme de fonctions truc

1. la vraie, pas l'intégrale généralisée

est truc". En fait, ce genre de litanie est (une fois précisée !) justifiée pour les propriétés de régularités : continuité, dérivabilité, mesurabilité, holomorphie, mais par pour l'intégrabilité qui est une propriété de "taille".

— On a lu parfois la phrase (fausse !) : ≪ la fonction f est intégrable sur $[a, b]$ pour tout a, b avec $0 < a < b < +\infty$) donc elle est intégrable sur $]0, +\infty[$ ≫. Cette phrase résonne comme un négatif de la phrase (vraie !) : ≪ la fonction f est dérivable sur $]a, b[$ pour tout a, b avec $0 < a < b < +\infty$) donc elle est dérivable sur $]0, +\infty[$ ≫. La différence est que la dérivabilité est une propriété locale (une propriété de la famille des voisinages des points de $]0, +\infty[$), ce que n'est pas l'intégrabilité par rapport à une mesure sur $]0, +\infty[$.

Solution 1

1. Solution 1 : Soit $x \in]0, \pi/2]$. La fonction $\theta \mapsto \sin\theta$ est continue sur $[0, x]$, dérivable sur $]0, x[$, de dérivée $\theta \mapsto \cos\theta$; donc d'après l'égalité des accroissements fini il existe $\theta \in]0, x[$ avec $\frac{\sin x}{x} = \cos\theta$. Comme $\theta \in]0, \pi/2[$, on a $0 \leq \frac{\sin x}{x} = \cos\theta < 1$.
   Solution 2 : La fonction $f(\theta) = \theta - \sin(\theta)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $1 - \cos\theta \geq 0$. Cette fonction est donc croissante. Les points d'annulation de la dérivée sont de la forme $\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$: ce sont des points isolés, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En particulier, pour tout $x > 0$, $f(x) > f(0) = 0$, d'où $x > \sin x$.
2. On a
   — Pour tout $x \in]0, \pi/2]$, $\lim_{n\to+\infty}(\frac{\sin x}{x})^n = 0$ car $0 \leq \frac{\sin x}{x} < 1$.
   — Pour tout $n \geq 1$, $x \in]0, \pi/2]$, on a $|(\frac{\sin x}{x})^n| \leq 1$.
   — $\int_{]0,2\pi}]1 d\lambda(x) < +\infty$.
   Avec le théorème de convergence dominée, on en déduit que
   $$\lim_{n\to+\infty} \int_{]0,2\pi}](\frac{\sin x}{x})^n \, d\lambda(y) = 0.$$
3. On a en 0 : $\sin x = x - x^3/6 + O(x^5)$, $\frac{\sin x}{x} = 1 - x^2/6 + O(x^4)$, donc $\log\frac{\sin x}{x} = -\frac{x^2}{6} + O(x^4)$. La fonction
   $$\phi(x) = -\frac{1}{x^2}\log\frac{\sin x}{x}$$
   est continue sur $]0, \pi/2]$, se prolonge par continuité avec $\phi(0) = \frac{1}{6}$.
4. ϕ est continue sur l'intervalle compact $[0, \pi/2]$. Sa borne inférieure y est donc atteinte en un point x. Si $x = 0$, $A = 1/6$, sinon $x \in]0, \pi/2[$ et l'inégalité $\frac{\sin x}{x} < 1$, entraîne $A = \phi(x) > 0$.

5. On fait alors le changement de variables : $y = \sqrt{n}y$:

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_n = \int_0^{\pi} (\frac{\sin x}{x})^n \, dx &= \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\pi\sqrt{n}} \left(\frac{\sin(y/\sqrt{n})}{(y/\sqrt{n})}\right)^n \, dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\pi\sqrt{n}} e^{-y^2\phi(y/\sqrt{n})} \, dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\mathbb{R}_+} f_n(y) \, d\lambda(y),\end{aligned}$$

avec $f_n(y) = 1\!\!1_{[0,\frac{\pi}{2}\sqrt{n}]}(y)e^{-y^2\phi(y/\sqrt{n})}$.

6. On a
   - Pour tout $y \geq 0$, on a pour $n \geq 4/\pi^2 y^2$:$f_n(y) = f_n(y) = e^{-y^2\phi(y/\sqrt{n})}$, d'où par continuité de ϕ en 0 : $\lim_{n\to+\infty} f_n(y) = e^{-y^2\phi(0)}$
   - Pour tout $n \geq 1$, $x \in]0, \pi/2]$, on a
   $$0 \leq f_n(y) \leq \exp(-\alpha y^2)$$
   - $\int_{\mathbb{R}} \exp(-\alpha y^2) \, d\lambda(y) < +\infty$.

   Avec le théorème de convergence dominée, on obtient
   $$\lim_{n\to+\infty} f_n(y) \, d\lambda(y) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-\phi(0)y^2) \, d\lambda(y),$$
   soit $\lim \mathcal{W}_n = 0$, soit
   $$\int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n \, dx \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} \exp(-\frac{y^2}{6}) \, dy.$$

Solution 2

1. Pour tout $x > 0$, la fonction $u \mapsto \exp(-xu^2)u^n \exp\left(i\frac{u^3}{3}\right)$ est continue. Elle est donc mesurable et localement intégrable. Pour montrer son intégrabilité, il suffit donc d'en majorer le module au voisinage de l'infini. Le développement en série de l'exponentielle donne pour tout $n \geq 0$ et tout $a > 0$, $\exp(a) \geq \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}$. On a donc

$$\begin{aligned}|\exp(-xu^2)u^n \exp\left(i\frac{u^3}{3}\right)| &= \exp(-xu^2)u^n \\ &\leq \frac{(n+1)!}{(xu^2)^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{x^{n+1}} \frac{1}{u^{n+2}} \\ &\leq \frac{(n+1)!}{x^{n+1}} \frac{1}{u^2}\end{aligned}$$

La fonction $u \mapsto \frac{1}{u^2}$ étant intégrable sur $[1, +\infty[$, on a l'intégrabilité requise ; ainsi I_n est bien définie sur $]0, +\infty[$.

2. Par définition de l'intégrale d'une fonction à valeurs complexes, le conjugué de l'intégrale est l'intégrale du conjugué. Ainsi

$$\begin{aligned}
\overline{I_n(x)} &= \int_{\mathbb{R}} \overline{\exp(-xu^2)u^n \exp\left(i\frac{u^3}{3}\right)}\, d\lambda(u) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \exp(-xu^2)u^n \exp\left(-i\frac{u^3}{3}\right)\, d\lambda(u) \\
&= (-1)^n \int_{\mathbb{R}} \exp(-x(-u)^2)(-u)^n \exp\left(i\frac{(-u)^3}{3}\right)\, d\lambda(u)
\end{aligned}$$

Or, la transformation $u \mapsto -u$ laisse invariante la mesure de Lebesgue, donc

$$\begin{aligned}
\overline{I_n(x)} &= (-1)^n \int_{\mathbb{R}} \exp(-x(-u)^2)(-u)^n \exp\left(i\frac{(-u)^3}{3}\right)\, d\lambda(u) \\
&= (-1)^n \int_{\mathbb{R}} \exp(-xu^2)u^n \exp\left(i\frac{u^3}{3}\right)\, d\lambda(u) \\
&= (-1)^n I_n(x)
\end{aligned}$$

Ainsi, pour n pair, la fonction I_n prend des valeurs réelles, tandis que pour n impair, la fonction I_n prend des valeurs imaginaires pures.

3. (a) Il suffit de faire un changement de variable affine $y = \sqrt{x}u$.

   (b) Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels. On pose $f_n(y) = \exp(-y^2)\exp\left(i\frac{(y/\sqrt{x_n})^3}{3}\right)$.
   On a
   - Comme la fonction exponentielle est continue en zéro, on a pour tout $y \geq 0$: $\lim_{n\to+\infty} f_n(y) = f(y) = \exp(-y^2)$.
   - Pour tout $y \geq 0$, pour tout $n \geq 1$: $|f_n(y)| = \exp(-y^2) = h(y)$.
   - $\int_{\mathbb{R}} h(y)\, d\lambda(y) < +\infty$.

   Les fonctions intégrées convergent ponctuellement en l'infini et sont bien majorées en valeur absolue par une fonction intégrable indépendante du paramètre n : on peut appliquer le théorème de convergence dominée, et on obtient la convergence

   $$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(y)\, d\lambda(y) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\, d\lambda(y),$$

   soit $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{x_n} I_0(x_n) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\, d\lambda(y)$. Comme c'est vrai pour toute suite (x_n) de limite infinie, on a $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} I_0(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\, d\lambda(y)$.

Comme $\int_{\mathbb{R}} f(y)\, d\lambda(y) > 0$ (f est positive et n'est pas presque partout nulle), on en déduit que

$$I_0(x) \sim \frac{C}{\sqrt{x}} \quad \text{avec } C = \int_{\mathbb{R}} f(y)\ d\lambda(y).$$

4. Soit $a > 0$. On a
   — Pour tout $u > 0$, la fonction $x \mapsto \exp(-xu^2)u^n \exp\left(i\frac{u^3}{3}\right)$ est dérivable sur $]a, +\infty[$, avec

   $$\frac{\partial}{\partial x} \exp(-xu^2)u^n \exp\left(i\frac{u^3}{3}\right) = -\exp(-xu^2)u^{n+2} \exp\left(i\frac{u^3}{3}\right).$$

   — Pour tout $u > 0$, pour tout $x \in]a, +\infty[$, on a

   $$\begin{aligned}|\frac{\partial}{\partial x} \exp(-xu^2)u^n \exp\left(i\frac{u^3}{3}\right)| &= \exp(-xu^2)u^{n+2} \\ &\leq \exp(-au^2)u^{n+2} = h_a(u)\end{aligned}$$

   — $\int_{\mathbb{R}} h_a(u)\ d\lambda(u) < +\infty$ (démontré à la première question)

   Les fonctions intégrées ont la bonne régularité par rapport au paramètre et les dérivées partielles par rapport au paramètre sont bien majorées en valeur absolue par une fonction intégrable indépendante du paramètre : on peut appliquer le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre, et on obtient la dérivabilité de I_n sur $]a, +\infty[$, avec

   $$\begin{aligned}I_n'(x) &= \int_{\mathbb{R}} -\exp(-xu^2)u^{n+2} \exp\left(i\frac{u^3}{3}\right)\ d\lambda(u) \\ &= -I_{n+2}(x)\end{aligned}$$

   Comme la dérivabilité est une propriété locale et que tout point de $]0, +\infty[$ a un voisinage de la forme $]a, +\infty[$, pour un certain $a > 0$, la fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la formule $I_n' = -I_{n+2}$ est évidemment valable sur $]0, +\infty[$ tout entier.

5. Les intégrales de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ des fonctions intégrables continues peuvent s'obtenir comme limites d'intégrales de Riemann sur des intégrales compacts :

   $$I_{n+2}(x) = \lim_{M \to +\infty} \int_{-M}^{M} \exp(-xu^2)u^{n+2} \exp\left(i\frac{u^3}{3}\right)\ dx.$$

Une intégration par parties donne

$$\begin{aligned}
&\int_{-M}^{M} \exp(-xu^2)u^{n+2} \exp\left(i\frac{u^3}{3}\right)\ dx \\
&= \int_{-M}^{M} \left(-i\exp(-xu^2)u^n\right)\left(iu^2 \exp\left(i\frac{u^3}{3}\right)\right)\ dx \\
&= \left[-i\exp(-xu^2)u^n \exp\left(i\frac{u^3}{3}\right)\right]_{-M}^{M} \\
&- \int_{-M}^{M} (-i\exp(-xu^2)(nu^{n-1} + u^n(-2ux))) \exp\left(i\frac{u^3}{3}\right) \\
&= i\int_{-M}^{M} \exp(-xu^2)(nu^{n-1} + u^n(-2ux))) \exp\left(i\frac{u^3}{3}\right)\ dx \\
&+ O(\exp(-xM^2)M^{n+2})
\end{aligned}$$

Comme $\lim_{M\to+\infty} \exp(-xM^2)M^{n+2} = 0$, on a

$$I_{n+2}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-xu^2)(nu^{n-1} - 2xu^{n+1}) \exp\left(i\frac{u^3}{3}\right)\ dx$$

Pour $n = 0$, on a alors $I_2(x) = -2ixI_1(x))$, tandis que pour $n \geq 1$, il vient

$$I_{n+2}(x) = i(nI_{n-1}(x) - 2xI_{n+1}(x)).$$

6. On a $I_0' = -I_2$, donc $I_0'' = (-I_2)' = -(I_2') = -(-I_4) = I_4$. Ainsi

$$\begin{aligned}
I_0'' &= I_4 \\
&= i(2I_1 - 2xI_3) \\
&= 2iI_1 - 2ix(i(I_0 - 2xI_2)) \\
&= -\frac{I_2}{x} + 2x(I_0 - 2xI_2) \\
&= -(\frac{1}{x} + 4x^2)I_2 + 2xI_0 \\
&= (\frac{1}{x} + 4x^2)I_0' + 2xI_0
\end{aligned}$$

Ainsi, I_0 est bien une solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle $y'' = (4x^2 + \frac{1}{x})y' + 2xy$.

7. Les calculs étant fastidieux, on va essayer de développer une méthode un peu générale pour dégager quelques idées. Posons $c(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \exp(-\frac{2}{3}x^{3/2})$. On va commencer par exhiber une équation différentielle vérifiée par $z(x) = I_0(c(x))$, puis on passera à $\mathrm{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi}g(x)z(x)$.

   On commence par écrire l'équation différentielle sous forme vectorielle. Si on pose $\overline{I}(x) = \begin{pmatrix} I_0(x) \\ I_0'(x) \end{pmatrix}$, $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2x & 4x^2 + \frac{1}{x} \end{pmatrix}$. On a $\overline{I}'(x) = A(x)\overline{I}(x)$. Maintenant, si on pose $\overline{Z}(x) = \begin{pmatrix} z(x) \\ z'(x) \end{pmatrix}$, et $M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c'(x) \end{pmatrix}$ on a

$$\begin{aligned} \overline{Z}(x) &= M(x)\overline{I}(c(x)) \text{ et en dérivant} \\ \overline{Z}'(x) &= M'(x)\overline{I}(c(x)) + c'(x)M(x)\overline{I}'(c(x)). \end{aligned}$$

   Maintenant, si on insère l'équation $\overline{I}'(c(x)) = A(c(x))\overline{I}(c(x))$, on obtient

$$\begin{aligned} \overline{Z}'(x) &= \left(M'(x) + c'(x)M(x)A(c(x))\right)\overline{I}(c(x)) \\ &= \left(M'(x) + c'(x)M(x)A(c(x))\right)M^{-1}(x)\overline{Z}(x) \end{aligned}$$

   Ainsi, si on pose $B = (M' + c'M(A \circ c))M^{-1}$, on a à nouveau une équation vectorielle d'ordre un : $\overline{Z}'(x) = B(x)\overline{Z}(x)$. On trouve $B(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & 2\sqrt{x} \end{pmatrix}$, ce qui signifie que

$$z'' = \frac{1}{2\sqrt{x}}z + 2\sqrt{x}z'.$$

   De même, si on pose $t(x) = g(x)z(x)$ (donc en fait ici $\mathrm{Ai}(x) = \frac{t(x)}{2\pi}$), $\overline{T}(x) = \begin{pmatrix} t(x) \\ t'(x) \end{pmatrix}$ et $P(x) = \begin{pmatrix} g(x) & 0 \\ g'(x) & g(x) \end{pmatrix}$ on a

$$\begin{aligned} \overline{T}(x) &= P(x)\overline{Z}(x) \text{ et en dérivant} \\ \overline{T}'(x) &= P'(x)\overline{Z}(x) + P(x)\overline{Z}'(x). \end{aligned}$$

Maintenant, si on insère l'équation $\overline{Z}'(x) = B(x)\overline{Z}(x)$, on obtient

$$\begin{aligned}\overline{T}'(x) &= \left(P'(x) + P(x)B(x)\right)\overline{Z}(x)\\ &= \left(P'(x) + P(x)B(x)\right)P^{-1}(x)\overline{T}(x)\end{aligned}$$

Ainsi, si on pose $D = (P'+PB)P^{-1}$, on a à nouveau une équation vectorielle d'ordre un : $\overline{T}'(x) = D(x)\overline{T}(x)$. On trouve $D(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix}$, ce qui signifie que $t'' = xt$, soit par linéarité

$$\mathrm{Ai}''(x) = x\mathrm{Ai}(x).$$

En l'infini, on a $\mathrm{Ai}(x) \sim \frac{C}{2\pi}\frac{1}{x^{1/4}}\exp(-\frac{2}{3}x^{3/2})$, donc Ai est clairement bornée au voisinage de l'infini.

Compléments culturels : Ce résultat n'a rien d'évident. La théorie générale des équations différentielles permet de montrer facilement que les solutions de l'équation d'Airy forment un espace vectoriel de dimension deux. En cherchant des solutions sous la forme d'une série entière, il n'est pas très difficile d'en trouver une base formée de deux fonctions qui sont chacune la somme d'une série entière de rayon de convergence infini et à coefficients positifs (et qui ne sont pas des constantes !). Ces fonctions sont ainsi non bornées au voisinage de l'infini, ce qui entraîne (pourquoi ?) que l'espace des solutions bornées au voisinage de l'infini est de dimension au plus un. Le travail qu'on a fait montre qu'il est de dimension exactement un.

Il existe bien d'autres manières de définir la fonction d'Airy (voir par exemple le très gros livre d'Olver : Asymptotics and Special Function (1974), qui est accessible en ligne `http://dlmf.nist.gov/9`). La définition la plus répandue est vraisemblablement la représentation intégrale

$$\mathrm{Ai}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\cos(\frac{t^3}{3} + xt)\ dt.$$

Mais il s'agit là d'une intégrale impropre semi-convergente, donc établir l'équation différencielle est plus délicat qu'ici. Pour une preuve, on pourra se reporter au livre de Queffelec et Zuily : Éléments d'analyse pour l'agrégation. Le résultat établi dans notre sujet correspond à la formule `http://dlmf.nist.gov/9.5#SS2.p2` du livre d'Olver.