Licence 3

Intégration et Probabilités

Devoir surveillé du 12 novembre 2015

durée 2h

****

Les calculatrices et les documents sont interdits.

ON SERA TRÈS VIGILANT À LA QUALITÉ DE LA RÉDACTION.

****

Exercice 1. *Intégrale de Wallis de deuxième espèce*
Pour $n \geq 1$, on pose

$$\mathcal{W}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n \, dx.$$

1. Montrer que pour tout $x \in]0, \pi/2]$, on a $\sin x < x$.
2. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathcal{W}_n = 0$.
3. Pour $x \in]0, \pi/2]$, on pose $\phi(x) = -\frac{1}{x^2} \log \frac{\sin x}{x}$. Montrer que ϕ admet un prolongement continu sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$. Dans la suite, on notera encore ϕ ce prolongement.
4. Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on ait l'inégalité $\phi(x) \geq A$.
5. Par un changement de variables bien choisi, montrer que
$$\mathcal{W}_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\frac{\pi}{2}\sqrt{n}} \left(\frac{\sin(y/\sqrt{n})}{(y/\sqrt{n})}\right)^n \, dy = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\mathbb{R}_+} f_n(y) \, d\lambda(y),$$
avec $f_n(y) = \mathbb{1}_{[0, \frac{\pi}{2}\sqrt{n}]}(y) e^{-y^2 \phi(y/\sqrt{n})}$.
6. Montrer enfin l'existence d'une constante K telle que $\mathcal{W}_n \sim \frac{K}{\sqrt{n}}$.

Exercice 2. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, on pose

$$I_n(x) = \int_{\mathbb{R}} u^n \exp(-xu^2) \exp\left(i\frac{u^3}{3}\right) \, d\lambda(u).$$

1. Vérifier que la fonction I_n est bien définie sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que pour n pair, la fonction I_n prend des valeurs réelles.
3. (a) Montrer que pour tout $x > 0$,

$$I_0(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-y^2) \exp\left(i\frac{(y/\sqrt{x})^3}{3}\right) \, d\lambda(y).$$

   (b) Montrer qu'il existe une constante C telle qu'on ait l'équivalent en l'infini

$$I_0(x) \sim \frac{C}{\sqrt{x}}.$$

   Indication : on pourra prendre une suite (x_n) de réels strictement positifs avec $\lim x_n = +\infty$ et considérer la suite $(\sqrt{x_n} I(x_n))_{n \geq 1}$.

4. Soit $a > 0$. Montrer que I_n est dérivable sur $]a, +\infty[$, avec

$$\forall x \in]a, +\infty[\quad I'_n(x) = -I_{n+2}(x).$$

   I_n est-elle dérivable sur $]0, +\infty[$?

5. À l'aide d'une intégration par parties, montrer soigneusement que

$$\begin{aligned} \forall n \geq 1 \quad \forall x \in]0, +\infty[\quad & I_{n+2}(x) = i(nI_{n-1}(x) - 2xI_{n+1}(x)) \\ \text{et } \forall x \in]0, +\infty[\quad & I_2(x) = -2ixI_1(x)). \end{aligned}$$

6. En déduire que I_0 est une solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle (de variable x)

$$y'' = (4x^2 + \frac{1}{x})y' + 2xy.$$

7. Hors barème. Question assez calculatoire, plutôt à chercher chez vous. On pose $\text{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi} \exp(-\frac{2}{3}x^{3/2}) I_0(\sqrt{x})$. Montrer que la fonction $\text{Ai}(x)$ est une solution de l'équation différentielle d'Airy $y'' = xy$ qui est bornée au voisinage de l'infini.

FIN