**Intégration et probabilités**
**Examen partiel du 24/10/2014 (durée 2h)**

Le sujet est composé de trois exercices indépendants. Aucun document n'est autorisé. Une attention particulière sera portée dans la notation à la qualité de la rédaction. Le sujet est long : le barème indicatif que nous donnons est donc sur un nombre de points supérieur à 20.

**Exercice 1. (6 points)**

1. On considère le cas particulier $E = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{A} = \sigma(\{1\})$ et $\mathcal{B} = \sigma(\{2\})$. Décrire complètement $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ et $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.
2. On revient au cas général. Soit $E$ un ensemble, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux tribus sur $E$.
   (a) Montrer que $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ est une tribu sur $E$.
   (b) $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ est-elle une tribu sur $E$ ?
   (c) Montrer que
   $$\sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \sigma(\{A \cap B : \ A \in \mathcal{A}, \ B \in \mathcal{B}\}).$$

**Exercice 2. (6 points)**

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note
   $$I_n = \int_0^1 x^n \ln(x) dx.$$
   Montrer que $I_n$ est une intégrale absolument convergente et calculer sa valeur en fonction de $n$.
2. (a) Enoncer le théorème de convergence monotone.
   (b) On rappelle que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Calculer
   $$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x} dx.$$

**Exercice 3. (12 poins)**

1. Enoncer le théorème de convergence dominée.
2. Un exemple.
   (a) Quel est le domaine de définition de $f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ ? Montrer qu'on peut la prolonger en une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$.
   (b) Déterminer $\lim_{n \to +\infty} n \int_0^1 \frac{\sin(t)}{t} \exp(-tn) dt$.
   On pourra faire un changement de variable, puis se ramener à une intégrale sur $[0, +\infty[$.

3. Soit $g : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable, continue en 0, avec $g(0) \neq 0$ et telle qu'il existe $n_0 > 0$ avec

$$\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} \exp(-n_0 t)|g(t)|dt \text{ converge.} \tag{1}$$

On souhaite déterminer un équivalent, quand $n$ tend vers $+\infty$, de

$$\int_0^{+\infty} \exp(-nt)g(t)dt.$$

(a) On pose, pour $n \geq n_0$, $T_g(n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-nt)g(t)dt$. Montrer que pour tout $n \geq n_0$, $T_g(n)$ est une intégrale absolument convergente.

(b) Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que pour tout $t \in [0, a]$, $|g(t)| \leq 2|g(0)|$.

(c) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-u)du$ est convergente.

(d) Soit $u > 0$ fixé. Déterminer

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\exp(-u)g(u/n)\mathbf{1}_{\{u/n \leq a\}}\right).$$

(e) A l'aide d'un changement de variable, déterminer

$$\lim_{n \to +\infty} \left(n \int_0^{+\infty} \exp(-nt)g(t)\mathbf{1}_{\{t \leq a\}}dt\right).$$

(f) A l'aide de l'hypothèse (1), montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \left(n \int_a^{+\infty} \exp(-nt)g(t)dt\right) = 0.$$

(g) Donner un équivalent, quand $n$ tend vers $+\infty$, de

$$\int_0^{+\infty} \exp(-nt)g(t)dt.$$

4. **Question hors-barême.** Déterminer un équivalent, quand $n$ tend vers $+\infty$, de

$$\int_0^{+\infty} \exp(-nt)\frac{t^2}{\exp(-t) - 1 + t}dt.$$