Intégration et probabilités
Examen partiel du 15/11/2012 (durée 2h)

Le sujet est composé de trois exercices indépendants. Aucun document n'est autorisé. Une attention particulière sera portée dans la notation à la qualité de la rédaction.

Exercice 1.
On munit $\mathbb{R}$ de la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, et d'une mesure μ telle que $\mu(\mathbb{R}) < +\infty$.

1. On rappelle que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}$. Montrer que
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad]-\infty, t] \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$
On pose alors $\forall t \in \mathbb{R} \quad F(t) = \mu(]-\infty, t])$.
2. Montrer que F est croissante sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}]-\infty, n]$ et en déduire $\lim_{t\to+\infty} F(t)$.
4. Déterminer $\lim_{t\to-\infty} F(t)$.

Exercice 2.
On souhaite donner une autre expression de $I = \int_0^{+\infty} \exp(-x)\cos(\sqrt{x})dx$.

1. Justifier la convergence de l'intégrale I.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} t^{n-1}\exp(-t)dt.$$
   (a) Justifier l'existence de $\Gamma(n)$ pour tout n.
   (b) Calculer $\Gamma(1)$, puis montrer que $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (on pourra procéder par récurrence).
3. On pose, pour tout $x \geq 0$,
$$g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(2k)!}\exp(-x).$$
   (a) On note μ la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Montrer que
$$\int_{[0,+\infty[} g d\mu = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k!}{(2k)!}.$$
   (b) g est-elle intégrable sur $[0, +\infty[$ pour la mesure de Lebesgue ?
4. (a) Enoncer le théorème de convergence dominée.
   (b) En utilisant le développement de $x \mapsto \cos(\sqrt{x})$ en série entière, montrer que
$$I = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{k!}{(2k)!}.$$
   On pourra poser $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^k}{(2k)!}\exp(-x)$.

Tournez SVP

Exercice 3.
Déterminer $\lim_{n \to +\infty} n \int_0^1 \frac{\cos(t)}{1+t^2n^2} dt$.
On pourra faire un changement de variable, puis se ramener à une intégrale sur $[0, +\infty[$.