Intégration et probabilités
Examen partiel du 10/11/2012 (durée 3h)

Le sujet est composé d'une question préliminaire et de quatre exercices indépendants. Aucun document n'est autorisé. Une attention particulière sera portée dans la notation à la qualité de la rédaction.

Préliminaire Rappeler un équivalent de $\ln(1+x)$ quand x tend vers 0 et montrer que pour tout $x \in]-1, +\infty[$,

$$\ln(1+x) \leq x.$$

Exercice 1. On se place sur $\mathbb{R}$, et on note

- $\mathcal{A}$ la tribu engendrée par la famille $\{]a,b[: \ a,b \in \mathbb{Q},\ a < b\}$ des intervalles ouverts bornés à extrémités rationnelles,
- $\mathcal{B}$ la tribu engendrée par la famille $\{[a,+\infty[: \ a \in \mathbb{R}\}$.

Montrer que $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

Exercice 2. Soit $\alpha \in]0,1[$ fixé. On se place sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, et on pose

$$\forall A \subset \mathbb{N} \quad \mu_\alpha(A) = \sum_{n \geq 0} (1-\alpha)^n \alpha \ \mathbb{1}_A(n).$$

1. Montrer que μ_α est une mesure.
2. Calculer $\mu_\alpha(\mathbb{N})$, et, pour tout $k \geq 0$, $\mu_\alpha(\{k, k+1, \dots\})$.

Exercice 3. Soit $(E, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et $f : E \to \mathbb{R}_+^*$ une application mesurable et telle que

$$\int f d\mu < +\infty.$$

On souhaite étudier, suivant la valeur de $\alpha > 0$,

$$\lim_{n \to +\infty} \int n \ln\left(1 + \frac{f}{n^\alpha}\right) d\mu.$$

1. Enoncer le lemme de Fatou, et traiter le cas $\alpha < 1$.
2. Enoncer le théorème de convergence dominée et traiter le cas $\alpha = 1$.
3. Traiter le cas $\alpha > 1$.

Tournez SVP

Exercice 4. Le but de ce problème est d'étudier

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n \ln(x)\left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx$$

et de donner une expression intégrale de la constante γ d'Euler.

1. Définition de la constante γ d'Euler. Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n).$$

   (a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k+1} \leq \displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx \leq \frac{1}{k}$.

   (b) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $u_n \geq 0$ et que $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

   (c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers une limite réelle. On appelle cette limite la constante γ d'Euler.

2. Calcul de $\displaystyle\int_0^n \ln(x)\left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx$. Soit $n \geq 1$ fixé.

   (a) Soit $0 < \varepsilon < 1$ fixé. Montrer que

$$\int_{\varepsilon n}^n \ln(x)\left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx = n\ln(n)\int_0^{1-\varepsilon} y^n dy + n\int_0^{1-\varepsilon}\ln(1-y)y^n dy.$$

   (b) En remarquant que $\left(\dfrac{y^{n+1}-1}{n+1}\right)' = y^n$, montrer que

$$\int_0^{1-\varepsilon}\ln(1-y)y^n dy = \frac{\ln(\varepsilon)}{n+1}\left((1-\varepsilon)^{n+1}-1\right) - \frac{1}{n+1}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{y^{n+1}-1}{y-1}dy.$$

   (c) Montrer que $\displaystyle\int_0^n \ln(x)\left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx = \frac{n}{n+1}\left(\ln(n) - \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\right)$.

3. Déterminer, pour $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n$ et montrer que pour tout $x \in [0, n]$, pour tout $n \geq 1$, $\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n \leq \exp(-x)$.

4. Intégrabilité de $x \mapsto |\ln(x)|\exp(-x)dx$ sur $]0, +\infty[$.

   (a) Soit $0 < \varepsilon < 1$. Calculer, à l'aide d'une intégration par partie, $\displaystyle\int_\varepsilon^1 \ln(x)dx$. La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est-elle intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $]0, 1]$?

   (b) Montrer que la fonction $g : x \mapsto \ln(x)\exp(-x/2)$ est majorée par une constante $C > 0$ sur $[1, +\infty[$. La fonction $x \mapsto \ln(x)\exp(-x)$ est-elle intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[1, +\infty[$?

   (c) La fonction $x \mapsto |\ln(x)|\exp(-x)$ est-elle intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $]0, +\infty[$?

5. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^n \ln(x)\left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx$ et montrer que $\gamma = -\displaystyle\int_0^{+\infty}\ln(x)\exp(-x)dx$.

Fin du sujet