Université de Nancy I **Licence 3**

Intégration et Probabilités

Corrigé de l'examen du 4 novembre 2011

Commentaires généraux

34 étudiants ont composé, aucune copie vide n'a été rendue. Le sujet était un peu long, aussi le barème était-il sur 33. La meilleure note observée est 22, ramenée à 20. La note suivante est 18,5, suivie par un 13,5. La médiane est de 7,5-8, le premier quartile de 11 et le troisième quartile de 6,5. La moyenne des notes (après écrétage à 20) est de 8,5.

Exercice 1 4 points

Le premier exercice visait à tester la compréhension des notions de limite inférieure et de limite supérieure. La majorité des étudiants répond correctement aux deux premières questions du 1) : l'idée intuitive est assez bien comprise. De même, le 2), qui visait à construire un exemple, à été plutôt bien réussi.

La mise en œuvre concrète de preuves est plus problématique : seules 2 copies proposent une solution complètement correcte, une troisième copie étant très proche du résultat.

On a fréquemment rencontré le raisonnement erroné suivant : "Pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble A_ε est infini", donc A_0 est infini". C'est évidemment faux : prendre par exemple $A_\varepsilon = \{n \geq 1; \frac{1}{n} \leq \varepsilon\}$. On a rencontré une fois le raisonnement suivant : I est infini, J aussi, donc $I \cap J$ est infini. C'est bien sûr faux (prendre les entiers pairs pour I, les entiers impairs pour J). Étonnament, plusieurs étudiants pensent que si $x < \underline{\lim}_{n\to+\infty} u_n$, l'ensemble des $n \geq 1$ tels que $u_n < x$ est vide. C'est faux, prendre par exemple $u_n = 100 - \frac{100}{n}$. $80 < \underline{\lim}_{n\to+\infty} u_n = 100$ mais u_1, u_2 et u_3 sont strictement inférieurs à 80. En revanche, il est vrai que si $x < \underline{\lim}_{n\to+\infty} u_n$, il existe N tel que l'ensemble des $n \geq N$ tels que $u_n < x$ est vide.

Comme on l'a déjà dit, le 2), qui visait à construire un exemple, à été plutôt bien réussi. Quelques copies prennent la suite $(\cos n)_{n\geq 1}$ comme exemple de suite qui admet -1 et 1 comme limites inférieure et supérieure. C'est vrai, mais c'est un résultat non trivial, car on ne peut pas exhiber de suite infinie d'entiers congrus à π (ou à 0) modulo 2π. (En fait, à cause de l'irationnalité de π, 0 est le seul entier congru à 0 modulo π.) La suite $(-1)^n$ est un exemple bien plus simple.

1. Comme $\overline{\lim}_{n\to+\infty} u_n \geq 1$, l'ensemble I des entiers n tels que $u_n \geq 1-\varepsilon$

est infini. Comme $\overline{\lim_{n\to+\infty}} v_n \geq 1$, l'ensemble des entiers n tels que $v_n < 1-\varepsilon$ est fini. Notons N son plus grand élément et posons $J = I \cap [N+1, +\infty[$. Comme I est infini, J est infini. Pour tout n dans J, on a $u_n \geq 1-\varepsilon$ et $v_n \geq 1-\varepsilon$, donc $u_n v_n \geq (1-\varepsilon)^2$. Comme J est infini, on en déduit que que $\overline{\lim_{n\to+\infty}} u_n v_n \geq (1-\varepsilon)^2$. Ainsi

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \overline{\lim_{n\to+\infty}} u_n v_n \geq (1-\varepsilon)^2.$$

En faisant tendre ε vers 0, on obtient

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \overline{\lim_{n\to+\infty}} u_n v_n \geq 1.$$

2 points

2. Les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ avec $u_n = 1$ et $v_n = 2 + (-1)^n$ pour tout $n \geq 1$ vérifient $\overline{\lim_{n\to+\infty}} u_n = 1$, $\underline{\lim_{n\to+\infty}} v_n = 1$ et $\overline{\lim_{n\to+\infty}} u_n v_n = 3$.2 points

Exercice 2 8 points

Cet exercice a été très mal réussi, plus de la moitié des copies obtenant la note zéro.

La première question demandait de rédiger de manière détaillée un raisonnement très fréquemment utilisé dans les calculs d'intégrales. Le résultat analogue est une évidence dans la théorie de l'intégrale de Riemann généralisée. Ce n'est pas le cas en théorie de Lebesgue, où il demande un petit raisonnement. On a ici rencontré beaucoup de confusions entre les deux théories, certains n'hésitant pas à affirmer (à tort !) qu'une fonction mesurable est toujours continue.

La deuxième question a eu à peine plus de succès, bien qu'elle ait déjà été traitée en TD. On a lu quelques horreurs comme "v_n tend vers 0 donc la série de terme général v_n converge", "$u_{n+1} - u_n$ tend vers 0 donc la suite u_n converge", ou encore "v_n est bornée, donc v_n converge". Il est très difficile de regagner la confiance du correcteur après avoir écrit de pareilles choses.

Seules les meilleures copies ont traité la troisième question. La majorité des étudiants auraient profit à refaire quelques exercices sur les fonctions "partie entière" et "partie fractionnaire", qui ne semblent pas familières au plus grand nombre.

1. On pose $f_n(x) = \mathbb{1}_{]1/n,1]}(x) f(x)$. On a $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \mathbb{1}_{]0,1]}(x) f(x)$ pour tout $x \in]0,1]$, donc $f_n(x)$ converge λ-presque partout vers $f(x)$ sur $[0,1]$. De plus, on a pour tout $x \in [0,1]$ et pour tout $n \geq 1$: $|f_n(x)| = \mathbb{1}_{]1/n,1]}(x)|f(x)| \leq |f(x)|$. Comme $x \mapsto |f(x)|$ est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$, le théorème de convergence dominée nous dit que

$$\int_{[0,1]} f(x)\, d\lambda(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_{[0,1]} f_n(x)\, d\lambda(x).$$

Or $\int_{[0,1]} f_n(x)\, d\lambda(x) = \int_{[0,1]} \mathbb{1}_{]1/n,1]}(x) f(x)\, d\lambda(x) = \int_{]1/n,1]}(x) f(x)\, d\lambda(x)$, d'où le résultat voulu. 2 points

2. Posons $u_n = H_n - \log n$. On a le comportement suivant

$$\begin{aligned} |u_n - u_{n-1}| &= |(H_n - H_{n-1}) - (\log n - \log(n-1))| \\ &= \left|\frac{1}{n} + \log(1-1/n)\right| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right| = O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Ainsi la série de terme général $u_n - u_{n-1}$ converge, mais on a la relation télescopique $\sum_{k=2}^{n} (u_n - u_{n-1}) = u_n - u_1$, donc la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge. Si on note γ la limite, on a $u_n = \gamma + o(1)$, soit

$$H_n = \log n + \gamma + o(1).$$

3 points

3. Posons

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \{\frac{1}{x}\}\mathbb{1}_{]1/n,1]}(x) = \frac{1}{x}\mathbb{1}_{]1/n,1]}(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \lfloor \frac{1}{x} \rfloor \mathbb{1}_{]\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}]}(x) \\ &= \frac{1}{x}\mathbb{1}_{]1/n,1]}(x) - \sum_{k=1}^{n-1} k\mathbb{1}_{]\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}]}(x) \end{aligned}$$

f_n est une fonction continue par morceaux, donc mesurable. Pour tout x de $]0,1]$, $f_n(x)$ tend vers $f(x) = \{\frac{1}{x}\}$, qui est donc aussi une fonction mesurable. Comme f est bornée par 1, l'intégrale existe. D'après la question 1), l'intégrale de f sur $]0,1]$ est la limite de $\int_{]1/n,1]} f\ d\lambda = \int_{]0,1]} f_n\ d\lambda$. Or,

$$\begin{aligned} \int_{]0,1]} f_n\ d\lambda &= \int_{1/n}^{1} \frac{dx}{x} - \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} k\ dx \\ &= \log n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \\ &= \log n - H_n + 1 \end{aligned}$$

On sait que $H_n - \log n$ admet une limite γ lorsque n tend vers l'infini, appelée . On en déduit que $\int_{]0,1]} \{\frac{1}{x}\}\ d\lambda(x) = 1 - \gamma$.3 points

Exercice 3 6 points

La théorie des tribus est un point délicat du programme, rarement assimilé immédiatement par les étudiants. Le vrai-faux permettait de tester cette compréhension, sans faire perdre trop de temps aux candidats. Seule la question 4. pouvait être qualifiée de "piège", puisqu'elle présentait un résultat vrai qui n'est pas dans le cours (mais la preuve est de difficulté modérée).

Une bonne réponse apportait 2/3 de point, une mauvaise réponse faisait perdre 1/3 de point. Si on avait demandé à des ministres de l'Éducation Nationale de répondre complètement au hasard à chaque question, ils auraient eu en moyenne 1/6. La moyenne des notes observée est de 2.72/6, et aucun étudiant ne fait moins bien que le ministre moyen, ce qui est plutôt encourageant.

Soient $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ des tribus sur Ω, $X \subset \Omega$ et $Y \subset \Omega$.

1. $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ est une tribu : OUI, une intersection de tribus est toujours une tribu 2/3 points
2. $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{E \subset \Omega; \exists (A, B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B} \quad E = A \cap B\}$: NON ; prenons $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$, $\mathcal{A} = \{\varnothing, A, A^c, \Omega\}$, $\mathcal{B} = \{\varnothing, B, B^c, \Omega\}$. On a $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{\varnothing, \Omega\}$ qui ne contient pas le singleton $\{1\}$, alors que $\{1\} = \{1, 2\} \cap \{1, 3\}$. 2/3 points
3. On a vu en exercice que $\sigma(\{E \subset \Omega; \exists (A, B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}\ E = A \cap B\}) = \sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$. D'autre part, comme $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ est une tribu, $\sigma(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$. On peut reprendre le contre-exemple précédent :$\sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\})$, tandis que $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ est la tribu triviale. La réponse est NON. 2/3 points
4. $\sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \sigma(\{E \subset \Omega; \exists (A, B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}\ E = A \cup B\})$. OUI. La preuve est simple, un exercice analogue a été fait en TD. 2/3 points
5. X est dans la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$: OUI 2/3 points
6. Si X est infini, les parties finies de X forment une tribu. NON : si A est une partie finie de X, son complémentaire n'est jamais une partie finie de X. 2/3 points
7. Si $X \subset Y$ et $Y \in \mathcal{A}$, alors $X \in \mathcal{A}$. NON. Reprendre la tribu $\mathcal{A}$ précédente avec $X = \{1\}$ et $Y = \{1, 2\}$. 2/3 points
8. Si $X \subset Y$ et $X \in \mathcal{A}$, alors $Y \in \mathcal{A}$. NON. Reprendre la tribu $\mathcal{A}$ précédente avec $X = \{1, 2\}$ et $Y = \{1, 2, 3\}$. 2/3 points
9. Si $X \in \mathcal{A}$ et $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, alors $X \in \mathcal{B}$. OUI. C'est la définition de l'inclusion.2/3 points

Exercice 4 15 points

Quelques remarques :

– L'erreur suivante a été fréquemment rencontrée dans la première question : du développement asymptotique $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$, de nombreux étudiants croient pouvoir déduire que pour tout $t \geq 0$, $\cos t \leq 1 - \frac{t^2}{2}$. Il faut retenir qu'un développement asymptotique en $o()$ au voisinage de 0 traduit l'existence d'une limite pour une certaine quantité : on peut, certes, en déduire des inégalités, mais sur un voisinage de 0 dont on ne connait pas l'amplitude : de $f(t) = \frac{t^2}{2} + o(t^2)$, je peux déduire par exemple qu'il existe M tel que

$$\forall t \in [-M, M] \quad f(t) \leq t^2,$$

mais je ne peux donner *a priori* de contrôle sur M.
Par exemple, si $f(t) = f_K(t) = \frac{t^2}{2} + K|t|^3$, j'ai bien $f_K(t) = \frac{t^2}{2} + o(t^2)$, mais je n'ai l'inégalité $f(t) \leq t^2$ que pour $t \in [-\frac{1}{2K}, \frac{1}{2K}]$.

– L'énoncé de la deuxième question a parfois été mal compris : certains s'arrêtent après avoir dit que la fonction que l'on souhaite intégrer est mesurable et positive. Il est vrai que dans ce cas, l'intégrale a toujours un sens si l'on admet qu'elle puisse valoir $+\infty$, mais dans le contexte, il était attendu que l'on montre (à un moment ou à un autre) que la valeur de l'intégrale était finie.

- À la question 6, plusieurs étudiants ont cru pouvoir calculer F à partir de sa dérivée. Rappelons que si $F' = f$ sur un intervalle I et que G est une primitive de f sur I, alors il existe une constance C telle que $F(x) = G(x) + C$ pour tout $x \in I$, mais C n'est pas forcément nul.
- Il faut revoir les théorèmes sur les intégrales dépendant d'un paramètre, en particulier le théorème de dérivabilité.
  Certains étudiants croient qu'ils suffit de vérifier l'intégrabilité de $\frac{\partial}{\partial x} f(x,t)$ pour avoir la dérivabilité de $x \mapsto \int \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\, d\lambda(t)$. D'autres, ont bien compris qu'il faut trouver g avec $|\frac{\partial}{\partial x} f(x,t)| \le g(t)$, mais négligent de vérifier l'intégrabilité de g, voire l'affirment contre toute évidence. On a ainsi parfois lu que $t \mapsto \frac{1}{t}$ était intégrable sur $]0, +\infty[$, ou, plus grave, que la fonction constante égale à 1 l'était.
- Établir des inégalités utiles est encore une grosse difficulté pour la grande majorité des étudiants. Il faut se familiariser avec les inégalités classiques et de ne plus se tromper sur le sens des inégalités, par exemple il faut être capable de dire sans hésitation que si $b \ge a$ et $x > 0$, alors $e^{-bx} \le e^{-ax}$ et non l'inverse. Seule la pratique intensive des exercices, crayon en main, permet de progresser.

1. Pour tout $t \ge 0$, on a $-1 \le \cos t \le 1$, ce qui entraîne évidemment $0 \le 1 - \cos t \le 2$. Pour $x \ge 0$ $\sin x = \int_0^x \cos u\, du \le \int_0^x 1\, du = x$, puis $1 - \cos t = \int_0^t \sin x\, dx \le \int_0^t x\, dx = \frac{t^2}{2}$.
   On a donc bien $0 \le 1 - \cos t \le \min(\frac{t^2}{2}, 2)$, d'où $\frac{1-\cos t}{t} \le \min(\frac{t}{2}, \frac{2}{t})$. Si $t \ge 2$, $\frac{2}{t} \le 1$, sinon $\frac{t}{2} \le 1$. Dans les deux cas $\min(\frac{t}{2}, \frac{2}{t}) \le 1$ et donc $0 \le \frac{1-\cos t}{t} \le 1$. 2 points
2. Soit $x > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{1-\cos t}{t} e^{-xt}$ est continue sur $]0, +\infty[$, donc mesurable par rapport à la tribu borélienne.
   Comme $|\frac{1-\cos t}{t} e^{-xt}| = \frac{1-\cos t}{t} e^{-xt} \le e^{-xt}$ et que $\int_{]0,+\infty[} e^{-xt}\, d\lambda(t) = \frac{1}{x} < +\infty$, la fonction $t \mapsto \frac{1-\cos t}{t} e^{-xt}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ par rapport à la mesure de Lebesgue. 1 points
3. Soit $a > 0$. On a $\frac{\partial}{\partial x} \frac{1-\cos t}{t} e^{-xt} = -(1 - \cos t) e^{-xt}$, donc

$$\forall x \in]a, +\infty[\quad \forall t \in]0, +\infty[\quad |\frac{\partial}{\partial x} \frac{1 - \cos t}{t} e^{-xt}| = (1 - \cos t) e^{-xt} \le 2e^{-at}.$$

   Comme $\int_{]0,+\infty[} 2e^{-at}\, d\lambda(t) = \frac{2}{a} < +\infty$, le théorème de dérivation sous le signe intégrale nous donne la dérivabilité de F sur $]a, +\infty[$, avec

$$F'(x) = \int_{]0,+\infty[} (\cos t - 1) e^{-xt}\, d\lambda(t) = \int_{]0,+\infty[} \cos t\, e^{-xt}\, d\lambda(t) - \frac{1}{x}.$$

   Comme $|e^{it} e^{-tx}| = e^{-tx}$, la fonction $t \mapsto e^{it} e^{-tx}$ est intégrable sur

$]0,+\infty[$:

$$\begin{aligned}\int_{]0,+\infty[} e^{it}e^{-tx}\,d\lambda(t) &= \lim_{M\to+\infty} \int_{]0,M[} e^{it}e^{-tx}\,d\lambda(t)\\ &= \lim_{M\to+\infty} \frac{1-e^{(i-x)M}}{x-i}\\ &= \frac{1}{x-i}\\ &= \frac{x+i}{x^2+1}\end{aligned}$$

On en déduit

$$\mathbf{Re} \int_{]0,+\infty[} e^{it}e^{-tx}\,d\lambda(t) = \frac{x}{x^2+1},$$

soit

$$\int_{]0,+\infty[} \cos t e^{-tx}\,d\lambda(t) = \frac{x}{x^2+1},$$

et finalement $F'(x) = \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x}$ pour tout $x \in]a,+\infty[$. Comme tout $x > 0$ admet un voisinage de la forme $]a,+\infty[$ pour un certain $a > 0$ (par exemple $a = x/2$) , la dérivabilité de F sur $]0,+\infty[$ s'ensuit. 3 points

4. $0 \le \frac{1-\cos t}{t}e^{-nt} \le e^{-nt}$, donc en intégrant $0 \le F(n) \le \frac{1}{n}$, ce qui entraîne $\lim\limits_{n\to+\infty} F(n) = 0$. Comme $F'(x) = \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x} = \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x}$, une primitive de F sur $]0,+\infty[$ est

$$\frac{1}{2}\log(x^2+1) - \log x = \frac{1}{2}(\log(x^2+1) - \log x^2) = \frac{1}{2}\log(1+x^{-2}),$$

donc il existe K réel tel que

$$\forall x > 0 \quad F(x) = \frac{1}{2}\log(1+x^{-2}) + K.$$

En faisant $x = n$ et en faisant tendre n vers l'infini, on obtient $K = 0$, soit

$$\forall x > 0 \quad F(x) = \frac{1}{2}\log(1+x^{-2}).$$

2 points

5. Comme précédemment $t \mapsto \frac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt}$ est positive, continue, majorée par $t \mapsto e^{-xt}$, donc intégrable. Ainsi G est bien définie.
On a $\frac{\partial}{\partial x}\frac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt} = -\frac{1-\cos t}{t}e^{-xt}$, donc

$$\forall x \in]a,+\infty[\quad \forall t \in]0,+\infty[\quad |\frac{\partial}{\partial x}\frac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt}| = \frac{1-\cos t}{t}e^{-xt} \le e^{-at}.$$

Comme $\int_{]0,+\infty[} e^{-at}\,d\lambda(t) = \frac{1}{a} < +\infty$, le théorème de dérivation sous le signe intégrale nous donne la dérivabilité de G sur $]a,+\infty[$, avec

$$G'(x) = -\int_{]0,+\infty[} \frac{1-\cos t}{t}e^{-xt}\,d\lambda(t) = -F(x).$$

2 points

6. On trouve une primitive de F grâce à une intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{2}\log(1+x^{-2})\ dx &= \frac{1}{2}x\log(1+x^{-2}) - \int \frac{x}{2}\frac{-2x^{-3}}{1+x^{-2}}\ dx \\
&= \frac{1}{2}x\log(1+x^{-2}) + \int \frac{1}{1+x^2}\ dx \\
&= \frac{x}{2}\log(1+x^{-2}) + \text{atan}x
\end{aligned}$$

Comme $G' = -F$, on en déduit qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x > 0 \quad G(x) = C - \frac{x}{2}\log(1+x^{-2}) - \text{atan } x.$$

1 points

7. Comme précédemment, on montre $0 \leq G(x) \leq \frac{1}{x}$, donc

$\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = 0.$

En $+\infty$, $\log(1+x^{-2}) \sim x^{-2}$, donc $-\frac{x}{2}\log(1+x^{-2}) \sim -\frac{1}{2x}$ et a donc une limite nulle en l'infini. Comme la fonction arctangente a une limite $\pi/2$ en l'infini, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} C - \frac{x}{2}\log(1+x^{-2}) - \text{atan } x = C - \frac{\pi}{2}$, d'où $C = \frac{\pi}{2}$. 1 points

8.

$$\forall x \geq 0 \quad \forall t \in]0,1] \quad 0 \leq \frac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt} \leq 1.1 = 1$$

$$\text{et } \forall x \geq 0 \quad \forall t > 1 \quad 0 \leq \frac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt} \leq \frac{1}{t^2}.1 = \frac{1}{t^2}$$

Ainsi

$$\forall x \geq 0 \quad \forall t > 0 \quad 0 \leq \frac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt} \leq 1\!\!1_{[0,1]}(t) + 1\!\!1_{]1,+\infty[}\frac{1}{t^2}.$$

Comme pour tout $t > 0$, l'application $x \mapsto \frac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et que

$$\int_{]0,+\infty[} 1\!\!1_{[0,1]}(t) + 1\!\!1_{]1,+\infty[}\frac{1}{t^2}\ d\lambda(t) = 1 + 1 = 2 < +\infty,$$

le théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre nous dit que $x \mapsto \int_{]0,+\infty[} \frac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt}\ d\lambda(t)$ est continue. En particulier

$$\int_{]0,+\infty[} \frac{1-\cos t}{t^2}\ d\lambda(t) = \lim_{x\to 0^+} \int_{]0,+\infty[} \frac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt}\ d\lambda(t) = \lim_{x\to 0^+} G(x).$$

Évaluons cette limite : on a pour $x > 0$

$$G(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\log(\frac{x^2+1}{x^2}) - \text{atan } x = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\log(1+x^2) + x\log x - \text{atan } x.$$

Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} x\log x = 0$, on obtient $\lim\limits_{x\to 0^+} G(x) = \frac{\pi}{2}$, soit

$$\int_{]0,+\infty[} \frac{1-\cos t}{t^2}\ d\lambda(t) = \frac{\pi}{2}.$$

Comme $\frac{1-\cos t}{t^2}$, est continue, positive, intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue, l'intégrale de Riemann impropre existe aussi et coïncide : on a ainsi

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\ dt = \frac{\pi}{2}.$$

3 points

FIN