Université de Nancy I **Licence 3**

Intégration et Probabilités

Examen du 4 novembre 2011

durée 3h

Les documents et calculatrices sont interdits.

***

Exercice 1

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ deux suites de nombres réels. On suppose que $\overline{\lim_{n\to+\infty}}\ u_n \geq 1$ et que $\underline{\lim_{n\to+\infty}}\ v_n \geq 1$.

1. Soit $\varepsilon \in]0,1[$. Que peut on dire de l'ensemble des entiers n tels que $u_n \geq 1-\varepsilon$? de l'ensemble des entiers n tels que $v_n < 1-\varepsilon$? En déduire que $\overline{\lim_{n\to+\infty}}\ u_n v_n \geq 1$.
2. Donner un exemple de suites de nombres réels $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ avec $\overline{\lim_{n\to+\infty}}\ u_n = 1$, $\underline{\lim_{n\to+\infty}}\ v_n = 1$ et $\overline{\lim_{n\to+\infty}}\ u_n v_n = 3$.

Exercice 2

1. Soit f une fonction mesurable, intégrable sur $[0,1]$ par rapport à la mesure de Lebesgue. Montrer soigneusement que
$$\int_{[0,1]} f(x)\ d\lambda(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_{]1/n,1]} f(x)\ d\lambda(x).$$
2. On pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer qu'il existe une constante réelle γ telle que l'on ait le développement asymptotique lorsque n tend vers l'infini :
$$H_n = \log n + \gamma + o(1).$$
3. Pour x réel, on note $\{x\}$ l'unique réel de $[0,1[$ tel que $x - \{x\} \in \mathbb{Z}$. Montrer que l'intégrale $\int_{]0,1]} \{\frac{1}{x}\}\ d\lambda(x)$ a une valeur finie et que
$$\int_{]0,1]} \{\frac{1}{x}\}\ d\lambda(x) = 1-\gamma,$$

Exercice 3

Soient $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ des tribus sur Ω, $X \subset \Omega$ et $Y \subset \Omega$.

Dites pour chacune des affirmations suivantes si elle est vérifiée quels que soient $\mathcal{A}, \mathcal{B}, X, Y$.
On demande simplement de répondre par OUI ou NON.

1. $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ est une tribu.
2. $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{E \subset \Omega; \exists (A, B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B} \quad E = A \cap B\}$.
3. $\sigma(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = \sigma(\{E \subset \Omega; \exists (A, B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}\ E = A \cap B\})$.
4. $\sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \sigma(\{E \subset \Omega; \exists (A, B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}\ E = A \cup B\})$.
5. X est dans la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$
6. Si X est infini, les parties finies de X forment une tribu.
7. Si $X \subset Y$ et $Y \in \mathcal{A}$, alors $X \in \mathcal{A}$.
8. Si $X \subset Y$ et $X \in \mathcal{A}$, alors $Y \in \mathcal{A}$.
9. Si $X \in \mathcal{A}$ et $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, alors $X \in \mathcal{B}$.

Exercice 4

1. Montrer que pour tout $t \geq 0$, on a $0 \leq 1 - \cos t \leq \min(\frac{t^2}{2}, 2)$, puis que pour tout $t > 0$, on a $0 \leq \frac{1-\cos t}{t} \leq 1$.
2. Montrer que pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{1-\cos t}{t} e^{-xt}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ par rapport à la mesure de Lebesgue. On pose alors
$$\forall x > 0 \quad F(x) = \int_{]0,+\infty[} \frac{1 - \cos t}{t} e^{-xt}\ d\lambda(t).$$
3. Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$, avec $F'(x) = \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x}$.
Indication : on pourra commencer par prendre $x \in]a, +\infty[$, où on a choisi un réel $a > 0$ quelconque.
4. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} F(n) = 0$. En déduire que
$$\forall x > 0 \quad F(x) = \frac{1}{2} \log(1 + x^{-2}).$$
5. On pose pour $x > 0$:
$$G(x) = \int_{]0,+\infty[} \frac{1 - \cos t}{t^2} e^{-xt}\ d\lambda(t).$$
Vérifier que G est bien définie, puis montrer que G est dérivable sur $]0, +\infty[$, avec $G' = -F$.
6. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que
$$\forall x > 0 \quad G(x) = C - \frac{x}{2} \log(1 + x^{-2}) - \operatorname{atan} x.$$
7. Déterminer la valeur de C.
8. Montrer que
$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2}\ dt = \frac{\pi}{2}.$$
(On commencera par montrer que l'intégrale converge.)

FIN