Intégration et Probabilités

Examen du 22 octobre 2010

durée 3h

Les documents et calculatrices sont interdits.

***

On rappelle les résultats suivants, démontrés en Travaux Dirigés, que l'on pourra utiliser sans démonstration.

- Si $(x_n)_{n\geq 1}$ et $(y_n)_{n\geq 1}$ sont deux suites réelles, avec $\lim_{n\to+\infty} y_n = y$, alors
$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\ (x_n + y_n) = y + \overline{\lim_{n\to+\infty}}\ x_n.$$
- Si $(x_n)_{n\geq 1}$ et $(y_n)_{n\geq 1}$ sont deux suites réelles, avec $\lim_{n\to+\infty} y_n = y > 0$, alors
$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\ (x_n y_n) = y\ \overline{\lim_{n\to+\infty}}\ x_n.$$
- Si $(x_n)_{n\geq 1}$ est une suite réelle et N un entier naturel quelconque non nul, alors
$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\ x_n = \max_{0\leq r<N}\ \overline{\lim_{p\to+\infty}}\ x_{pN+r}.$$

***

Exercice 1

1. Soit Ω un ensemble fini. Montrer que la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$ est engendrée par les singletons $\{x\}$, où x décrit Ω.
2. Soit n un entier naturel non nul. On pose $\Omega = \{1,\dots,n\}$ et $\Omega' = \{1,\dots,2n\}$. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties A de Ω' telles que
$$\forall x \in \{1,\dots,2n\} \quad (x \in A) \iff (2n+1-x) \in A.$$
   (a) Montrer que $\mathcal{A}$ est une tribu.
   (b) Montrer que l'application
$$\begin{array}{rcl}\psi : \Omega' & \to & \Omega \\ x & \mapsto & \min(x, 2n+1-x)\end{array}$$
   est $(\Omega', \mathcal{A}) - (\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ mesurable.

Exercice 2

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé ; $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite <u>décroissante</u> d'événements sur Ω avec $\mathbb{P}(A_1) = 1/2$, et

$$\forall n \geq 1 \quad \mathbb{P}(A_{n+1}^c | A_n) \leq \frac{1}{(n+1)^2}.$$

1. Montrer que

$$\forall n \geq 1 \quad \mathbb{P}(A_n) \geq \frac{1}{2} \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{(i+1)^2}\right) \geq \frac{1}{2} \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{i(i+1)}\right).$$

2. Montrer que pour tout $x \in [0, 1/2]$, $-\log(1-x) \leq 2x$. En déduire que

$$\forall n \geq 1 \quad \mathbb{P}(A_n) \geq \frac{1}{2e^2}.$$

3. Montrer que

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i\Big) > 0.$$

Problème

Soit $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ une fonction <u>croissante</u> telle que

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{h(k)}{k(k+1)} < +\infty.$$

On suppose que la fonction $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ vérifie $\phi(0) = 0$ et :

$$\forall x, y \in \mathbb{N}^2 \quad \phi(x+y) \leq \phi(x) + \phi(y) + h(x+y).$$

Le but de ce problème est de démontrer un théorème de Hammersley (1961) : la suite $\phi(n)/n$ converge vers un certain $L < +\infty$.

1. Soit n un entier naturel non nul. Montrer que

$$\frac{h(n)}{n} \leq 2 \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{h(k)}{k(k+1)} \tag{1}$$

2. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{h(n)}{n} = 0$.

3. Soient p, N, r des entiers naturels avec $0 \leq r < N$. Montrer que

$$\phi(pN + r) \leq \phi(pN) + \phi(r) + h((p+1)N).$$

   En déduire que pour tout entier N non nul, on a

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \frac{\phi(n)}{n} \leq \varlimsup_{p\to+\infty} \frac{\phi(pN)}{pN}.$$

4. Montrer que pour quels que soient les entiers naturels N et n, on a
$$\frac{\phi(2^n N)}{2^n} \leq \phi(N) + \sum_{i=1}^{n} \frac{h(2^i N)}{2^i}. \tag{2}$$
(On convient que la somme à droite est nulle pour $n = 0$.)
5. Soit N et p des entiers naturels non nuls quelconques. On suppose que l'entier naturel p s'écrit en base 2 :
$$p = \sum_{k=0}^{\ell} 2^k a_k, \text{ avec } a_k \in \{0; 1\}.$$
On a donc $a_\ell = 1$. On pose
$$s_{-1} = 0 \text{ et, pour } 0 \leq n \leq \ell : s_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k a_k.$$
   (a) Montrer que
   $$\forall n \in \{0, \ldots, \ell\} \quad \phi(s_n N) - \phi(s_{n-1} N) \leq a_n \phi(2^n N) + h(2^{n+1} N).$$
   (On pourra distinguer les cas suivant la valeur de a_n.)
   (b) On donne l'identité
   $$\sum_{n=0}^{\ell} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{h(2^i N)}{2^i} 2^n + h(2^{n+1} N) \right) = 2^{\ell+1} \sum_{i=1}^{\ell+1} \frac{h(2^i N)}{2^i},$$
   qu'on ne demande pas de vérifier. Montrer
   $$\phi(pN) \leq p\phi(N) + \sum_{n=0}^{\ell} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{h(2^i N)}{2^i} 2^n + h(2^{n+1} N) \right) \leq p\phi(N) + 2p \sum_{i=1}^{\ell+1} \frac{h(2^i N)}{2^i}.$$
   (On pourra utiliser l'inégalité (2).)
   (c) En déduire
   $$\phi(pN) \leq p\phi(N) + 4pN \sum_{k=2N}^{+\infty} \frac{h(k)}{k(k+1)}. \tag{3}$$
   (On pourra utiliser l'inégalité (1).)
6. On pose $L = \varlimsup_{n \to +\infty} \frac{\phi(n)}{n}$. Montrer que $L < +\infty$.
7. Soit $L' > L$ et $\varepsilon > 0$.
   (a) Montrer qu'il existe un entier naturel N tel que
   $$\frac{\phi(N)}{N} \leq L' \text{ et } \sum_{k=2N}^{+\infty} \frac{h(k)}{k(k+1)} \leq \varepsilon.$$
   (b) En déduire
   $$\varlimsup_{p \to +\infty} \frac{\phi(pN)}{pN} \leq L' + 4\varepsilon.$$
8. Montrer que pour tout $L' > L$,
$$\varlimsup_{n \to +\infty} \frac{\phi(n)}{n} \leq L'.$$
Conclure.

FIN