Université de Nancy I **Licence 3**

Nancy-Université
Université Henri Poincaré

Intégration et Probabilités

Corrigé de l'examen du 22 octobre 2009

Commentaires généraux

54 étudiants ont composé, aucune copie vide n'a été rendue. Le sujet était un peu long, aussi le barème était-il sur 31.5. Les notes ont ensuite été multipliées par 1.1, puis arrondies au demi-entier le plus proche. Ainsi la meilleure note possible était de 35. La meilleure note observée est 31, ramenée à 20 ainsi que 23.5,23,20.5. La médiane est de 8.5, le premier quartile de 11,5 et le troisième quartile de 5,5. La moyenne des notes (après écrétage à 20) est de 9,07.

Exercice I

Le premier exercice est assez proche de plusieurs exercices faits en TD. Le cours est assez bien appris, comme en témoigne le petit nombre de notes très faibles (la moyenne des notes est de 3.7/8). Cependant, le manque d'habitude des raisonnements sur les sup se fait sentir : finalement seules 8 copies sur 54 atteignant une note supérieure ou égale à 6/8 à cet exercice, ce qui est un peu décevant.

Rappelons quelques règles d'hygiène mathématique : on ne peut jamais parler d'un élément sans avoir précisé dans quel ensemble il vivait ; de la même manière un sup est toujours pris sur un certain ensemble : l'écriture $\sup a_n$ n'a pas de sens, tout au plus peut-elle être tolérée dans des contextes bien précis, que seuls des mathématiciens aguerris peuvent identifier[1]

Plusieurs copies laissent penser que l'identité

$$\lim_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n + \lim_{n\to+\infty} b_n$$

peut être utilisée sans problème. C'est une erreur : on ne peut l'utiliser qu'une fois qu'il a été établi que les suites $(a_n)_{n\ge1}$ et $(b_n)_{n\ge1}$ admettent chacune une limite.

Plusieurs copies semblent utiliser que l'on peut composer les équivalents : c'est faux ; par exemple au voisinage de l'infini $n^2 + n \sim n^2$ mais e^{n^2+n} n'est pas équivalent à e^{n^2} (le quotient tend vers l'infini).

On a lu plusieurs fois que $\lim_{n\to+\infty}(1+1/n)^n = 1$: je rappelle que 1^∞ est une forme indéterminée ; dans ce cas, il faut souvent, comme ici, passer au logarithme, regarder la limite du log, puis utiliser la continuité de l'exponentielle sur $\overline{\mathbb{R}}$.

1. Posons $a = \limsup_{n\to+\infty} a_n$, $b = \limsup_{n\to+\infty} b_n$. Soit $a' > a$ et $b' > b$ quelconques. Il existe N_0 entier tel que $n \ge N_0$ entraîne $a_n \le a'$. Il existe N_1 entier tel que $n \ge N_1$ entraîne $b_n \le b'$. Pour $n \ge \max(N_0, N_1)$, on a $a_n + b_n \le a' + b'$, ce qui entraîne

$$\limsup_{n\to+\infty} (a_n + b_n) \le a' + b'.$$

En prenant la borne inférieure sur tous les couples (a', b') avec $a' > a$ et $b' > b$, on obtient

$$\limsup_{n\to+\infty} (a_n + b_n) \le a + b.$$

[1] Si un enseignant emploie ce genre d'abus de notation devant vous, vous devez lui demander une clarification.

2. Soit $b \in \mathcal{V}((b_n)_{n\geq 1})$: il existe une suite strictement croissante d'entiers $(\phi(n))_{n\geq 1}$, avec $b = \lim b_{\phi(n)}$. Si on pose $x_n = a_n + b_n$, on a $x_{\phi(n)} = a_{\phi(n)} + b_{\phi(n)}$. Comme $(a_{\phi(n)})$ est extraite de (a_n) qui tend vers a, $(a_{\phi(n)})$ tend vers a, donc $x_{\phi(n)}$ tend vers $a + b$. Ainsi $a + b \in \mathcal{V}((a_n + b_n)_{n\geq 1})$, soit finalement $a + \mathcal{V}((b_n)_{n\geq 1}) \subset \mathcal{V}((a_n + b_n)_{n\geq 1})$. Réciproquement, soit $x \in \mathcal{V}((x_n)_{n\geq 1})$: il existe une suite strictement croissante d'entiers $(\phi(n))_{n\geq 1}$, avec $x = \lim x_{\phi(n)}$. On a $b_{\phi(n)} = x_{\phi(n)} - a_{\phi(n)}$. Comme $(a_{\phi(n)})$ est extraite de (a_n) qui tend vers a, $(a_{\phi(n)})$ tend vers a, donc $x_{\phi(n)}$ tend vers $x - a$. Ainsi, on a $x = a + (x - a)$, avec $x - a \in \mathcal{V}((b_n))$, soit $x \in a + \mathcal{V}((b_n)_{n\geq 1})$. Finalement $\mathcal{V}((a_n + b_n)_{n\geq 1}) \subset \mathcal{V}((b_n)_{n\geq 1})$.
3. Notons $\overline{b}$ la limite supérieure de (b_n). On sait que $\overline{b}$ est une valeur d'adhérence de (b_n), donc d'après la question précédente, $a+\overline{b}$ est une valeur d'adhérence de (a_n+b_n). Comme la limite supérieure est la plus grande valeur d'adhérence, $\limsup\limits_{n\to+\infty} (a_n+b_n) \geq a+\overline{b}$. Cependant, on avait montré à la première question que $\limsup\limits_{n\to+\infty} (a_n + b_n) \leq a + b$, d'où finalement $\limsup\limits_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = a + \overline{b}$.
4. $\ln(1 + 1/n)^n = n \ln(1 + 1/n)$. En l'infini $\ln(1 + 1/n) \sim 1/n$, donc $n \ln(1 + 1/n) \sim 1$: On a donc $\lim_{n\to+\infty} \ln(1 + 1/n)^n = 1$, d'où, par continuité de l'exponentielle $\lim_{n\to+\infty}(1 + 1/n)^n = e$. Avec la question précédente, cela nous donne $\limsup\limits_{n\to+\infty} ((1 + 1/n)^n + \cos n) = 1 + e$.

Exercice II

Cet exercice était attendu comme étant le plus difficile des trois. De fait, l'exercice a demandé beaucoup d'efforts aux candidats, qui en ont été le plus souvent bien mal récompensés. La moyenne est ici sans appel : 2.1 sur un total de 9 points. Ici encore, la lecture des copies montre qu'un travail important a souvent été fait. Malheureusent, des erreurs et des approximations anciennes viennent saper ce travail.

- Au premier rang, la confusion entre inclusion ($\subset$) et appartenance ($\in$). À premier abord, cela peut sembler bénin d'écrire $A \in A$ (ce qui n'a pas de sens) au lieu de $A \subset A$, mais quand on en vient à étudier les propriétés des ensembles, ce genre de confusions fait qu'on ne comprend vite plus rien à ce qu'on écrit.
- Plusieurs candidats semblent penser que l'on peut vérifier qu'un ensemble A possède une certaine propriété $\mathcal{P}(A)$ en vérifiant que chaque élément $x \in A$ vérifie chacun, une propriété $\mathcal{Q}(x)$. Bien sûr, l'erreur n'est jamais si explicite et prend souvent la forme du raisonnement (faux) suivant : $A \subset A'$, or $\mathcal{P}(A')$ est vrai, donc $\mathcal{P}(A)$ est vrai. Ce raisonnement n'est valide que si $\mathcal{P}$ s'écrit

$$\mathcal{P}(A) = \{\forall x \in A; \mathcal{Q}(x)\},$$

mais en général, c'est faux : par exemple, pour $A \subset \mathbb{R}$, notons

$$\mathcal{S}(A) = \{\forall x \in A; -x \in A\}.$$

Les parties A telles que $\mathcal{S}(A)$ est vrai sont les parties symétriques de $\mathbb{R}$: par exemple $\mathcal{S}(\{-2, -1, 1, 2\})$ est vrai, cependant $\mathcal{S}(\{-2, -1, 1\})$ est faux. Ici, la propriété de l'ensemble considérée est souvent l'appartenance à une tribu. J'ai ainsi pu retrouver le raisonnement fautif pourtant maintes fois décrié : "$A \subset A'$, $\mathcal{A}' \in \mathcal{T}$, donc $A \in \mathcal{T}$". En II.3, on a aussi souvent lu "$\mathcal{F}$ est une tribu, donc un π-système, $C \in \mathcal{F}$, donc C est un π-système." Ici, l'erreur est double : non seulement le π-système n'est pas C, mais $\{C\}$, mais une partie d'un π-système n'a aucune raison d'être un π-système.

Seuls 10 candidats ont obtenu le maximum des points à la question II.2.a ; pourtant cette question ne fait intervenir aucune notion du programme de L3 : cela illustre les difficultés du maniement d'un formalisme abstrait. La plupart des candidats ne parvient pas à choisir une notation pour désigner deux éléments de $\mathcal{B}$: plusieurs fois, on a trouvé $B = \bigcap_{j\in J} A_j$ et $B' = \bigcap_{j\in J} A_j$, ce qui donne la conclusion triviale $B \cap B' = B$. Certains démarrent bien, mais écrivent $(\bigcap_{j\in J} A_j) \cap (\bigcap_{j\in J'} A_j) = \bigcap_{j\in J\cap J'} A_j$ (au lieu de $\bigcap_{j\in J\cup J'} A_j$). On espère que c'est juste une erreur d'inattention.

1. La tribu τ engendrée par A, contient $\varnothing$ et Ω (comme toutes les tribus), A (par définition), A^c (car une tribu est stable par passage au complémentaire). Ainsi $\tau \supset \{\varnothing, \Omega, A, A^c\}$. Pour montrer que $\tau = \{\varnothing, \Omega, A, A^c\}$, il suffit de vérifier que $\{\varnothing, \Omega, A, A^c\}$ est une tribu. La stabilité par passage au complémentaire est évidente (on regarde les 4 cas). Disons un mot sur la stabilité par union dénombrable. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles avec pour tout $i \in I$, $A_i \in \{\varnothing, \Omega, A, A^c\}$. Comme $\{\varnothing, \Omega, A, A^c\}$ est fini, la réunion infinie peut se remplacer par une réunion finie (pas besoin de prendre deux fois le même ensemble). Maintenant, par examen des cas, il est clair que $\{\varnothing, \Omega, A, A^c\}$ est stable par réunion finie.

2. (a) Écrivons $B = \bigcap_{j\in J} A_j$ et $B' = \bigcap_{j\in J'} A_j$ avec $J, J' \in \mathcal{P}_f(I)$. On a
$$B \cap B' = (\bigcap_{j\in J} A_j) \cap (\bigcap_{j\in J'} A_j) = \bigcap_{j\in J\cup J'} A_j,$$
ce qui donne le résultat voulu car $J \cup J' \in \mathcal{P}_f(I)$.

   (b) Soit $B \in \mathcal{B}$: il existe $J \subset I$ fini, avec $B = \bigcap_{j\in J} A_j$. Comme pour tout $j \in J$, $A_j \in \sigma((A_i)_{i\in I})$ et que $\sigma((A_i)_{i\in I})$, comme toute tribu, est stable par intersection finie, on a $B \in \sigma((A_i)_{i\in I})$. Ainsi $\mathcal{B} \subset \sigma((A_i)_{i\in I})$, d'où $\sigma(\mathcal{B}) \subset \sigma((A_i)_{i\in I})$.
   Prenons maintenant $i \in I$: on a $A_i = B_{\{i\}}$, $\{i\}$ est bien une partie finie de I. Ainsi $A_i \in \mathcal{B}$, d'où $\sigma((A_i)_{i\in I}) \subset \sigma(\mathcal{B})$. Finalement, on a bien $\sigma(\mathcal{B}) = \sigma((A_i)_{i\in I})$.

3. On a vu que $\mathcal{B}$ est un π-système. De même, le singleton $\{C\}$ est également un π-système. Vu l'hypothèse qui est faite et la proposition , les tribus $\sigma(\mathcal{B})$ et $\sigma(C)$ sont indépendantes, mais $\sigma(\mathcal{B}) \subset \sigma((A_i)_{i\in I})$, donc les tribus $\sigma((A_i)_{i\in I})$ et $\sigma(\mathcal{B})$ sont indépendantes.

4. D'après la proposition 2, il suffit de montrer que pour tout $i_0 \in I$, les tribus $\sigma((A_i)_{i\in I\backslash\{i_0\}})$ et $\sigma(A_{i_0})$ sont indépendantes. D'après la question précédente, il suffit de montrer que pour tout B qui s'écrit $B = \bigcap_{j\in J} A_j$ avec $J \subset I\backslash\{i_0\}$, on a $\mathbb{P}(B \cap A_{i_0}) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A_{i_0})$. Or, l'indépendance des $(A_i)_{i\in I}$ nous donne
$$\mathbb{P}(\bigcap_{i\in I} A_i) = \prod_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)$$
et
$$\mathbb{P}(\bigcap_{i\in I\backslash\{i_0\}} A_i) = \prod_{i\in I\backslash\{i_0\}} \mathbb{P}(A_i),$$
ce qui donne l'identité voulue.

5. D'après la question précédente, les tribus $(\sigma(A_n))_{n\geq 1}$ sont indépendantes. Soit J fini inclus dans $\mathbb{N}^*$: pour tout $j \in J$ $A_j^c \in \sigma(A_j)$: comme les tribus

$(\sigma(A_n))_{n\geq 1}$ sont indépendantes, on a donc

$$\mathbb{P}(\bigcap_{j\in J} A_j^c) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}(A_j^c).$$

Comme cette identité est vérifiée pour toutes les parties J finies de $\mathbb{N}^*$, les événements $(A_n^c)_{n\geq 1}$ sont indépendants.

Exercice III

Peu de points (en moyenne 2.4/14.5) ont été marqués sur ce dernier exercice, qui arrivait après que les candidats aient déjà perdu beaucoup de temps et d'énergie sur les deux premiers. L'exercice portait à la fois sur des questions de probabilité, d'indépendance et sur quelques points d'intégration. Comme nous avons fait encore peu d'exercices d'intégration en TD, la faible réussite sur ces questions n'est pas inquiétante. Soulignons tout de même que quelques candidats invoquent une version erronée du théorème de convergence monotone : qu'ils l'oublient tout de suite ! c'est bien la suite de fonctions qui doit être monotone, non les fonctions elles-mêmes (en réalité Ω n'est pas forcément ordonné). La définition de l'indépendance d'une famille de plus de deux événement est mal connue : de nombreux étudiants semblent ne connaitre que l'indépendance deux à deux. Des définitions fausses de l'indépendance sont également proposées. De fait, seules les trois meilleures copies ont traité de manière convaincante la question III.6, qui ressemblait pourtant à plusieurs exercices faits en TD.

1. L'identité
$$\int_\Omega f_s(\omega)\ dC(\omega) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}.$$
découle juste de la formule d'intégration d'une fonction positive par rapport à la mesure de comptage. Comme $s > 1$, on reconnait une série de Riemann convergente

2. Soit $(s_n)_{n\geq 1}$ une suite monotone décroissante de limite 1. La suite $(f_{s_n})_{n\geq 1}$ est une suite croissante de fonctions positives, convergeant simplement vers f définie par $f(\omega) = 1/\omega$. D'après le théorème de convergence monotone, on a
$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_{s_n}(\omega)\ dC(\omega) = \int_\Omega f(\omega)\ dC(\omega),$$
soit
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{s_n}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k},$$
soit encore
$$\lim_{n\to+\infty} \zeta(s_n) = +\infty,$$
puisque la série harmonique est divergente. Comme la suite (s_n) est décroissante quelconque, on en déduit que $\lim_{s\to 1^+} \zeta(s) = +\infty$.

3. On a vu que $k \mapsto f_s(k)$ est intégrable par rapport à la mesure de comptage, d'intégrale $\zeta(s)$. Par suite, $k \mapsto \frac{1}{\zeta(s)} f_s(k)$ est intégrable par rapport à la mesure de comptage, d'intégrale $\zeta(s)/\zeta(s) = 1$: ainsi on peut bien définir une mesure μ_s la mesure sur $(\Omega, \mathcal{F})$ dont la densité par rapport à la mesure de comptage est $k \mapsto \frac{1}{\zeta(s)} f_s(k)$. Par définition d'une mesure à densité,
$$\mu_s(\mathbb{N}) = \int_\mathbb{N} \frac{1}{\zeta(s)} f_s(\omega)\ dC(\omega) = 1,$$

comme on vient de le voir, ce qui montre que μ_s est une mesure de probabilité.

$$\begin{aligned}
\mu_s(\{i\}) &= \int_{\{i\}} \frac{1}{\zeta(s)} f_s(\omega)\ dC(\omega) \\
&= \int_{\Omega} 1\!\!1_{\{i\}}(\omega) \frac{1}{\zeta(s)} f_s(\omega)\ dC(\omega) \\
&= \int_{\Omega} 1\!\!1_{\{i\}}(\omega) \frac{1}{\zeta(s)} \frac{1}{i^s}\ dC(\omega) \\
&= \frac{1}{\zeta(s)} \frac{1}{i^s} \int_{\Omega} 1\!\!1_{\{i\}}(\omega)\ dC(\omega) \\
&= \frac{1}{\zeta(s)} \frac{1}{i^s} C(\{i\}) \\
&= \frac{1}{\zeta(s)} \frac{1}{i^s}
\end{aligned}$$

4.
$$p\mathbb{N}^* = \bigcup_{k\geq 1} \{kp\}.$$

Bien sûr, la réunion est disjointe, donc

$$\begin{aligned}
\mu_s(p\mathbb{N}^*) &= \sum_{k\geq 1} \mu_s(\{kp\}) \\
&= \sum_{k\geq 1} \frac{1}{\zeta(s)} \frac{1}{(kp)^s} \\
&= \frac{1}{\zeta(s)} \frac{1}{p^s} \sum_{k\geq 1} \frac{1}{p^s} \\
&= \frac{1}{\zeta(s)} \frac{1}{p^s} \zeta(s) \\
&= \frac{1}{p^s}
\end{aligned}$$

5. $\bigcap_{k\geq 1} A_k^c$ est l'ensemble des entiers naturels non nuls qui ne sont multiples d'aucun nombre premier, autrement dit qui ne sont divisibles par aucun nombre premier. Or 1 est le seul entier naturel qui n'ait pas de facteur premier, d'où l'identité
$$\{1\} = \bigcap_{k\geq 1} A_k^c.$$

Posons $B_n = \bigcap_{k=1}^{n} A_k^c$. La suite $(B_n)_{n\geq 1}$ est décroissante, avec $\bigcap_{n\geq 1} B_n = \bigcap_{k\geq 1} A_k^c = \{1\}$. Ainsi, d'après le théorème de continuité séquentielle décroissante, $\lim_{n\to+\infty} \mu_s(B_n) = \mu_s(\{1\}) = \frac{1}{\zeta(s)}$, ce qui est le résultat voulu.

6. Soit I fini inclus dans $\mathbb{N}^*$

$$\prod_{i\in I} \mu_s(A_i) = \prod_{i\in I} \mu_s(p_i\mathbb{N}^*) = \prod_{i\in I} \frac{1}{p_i^s}.$$

D'autre part, comme les p_i sont premiers, ils sont premiers entre eux, d'où

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} p_i\mathbb{N}^* = (\prod_{i\in I} p_i)\mathbb{N}^*,$$

d'où

$$\mu_s(\bigcap_{i\in I} A_i) = \mu_s((\prod_{i\in I} p_i)\mathbb{N}^*) = \frac{1}{(\prod_{i\in I} p_i)^s},$$

d'où l'identité

$$\prod_{i\in I} \mu_s(A_i) = \mu_s(\bigcap_{i\in I} A_i),$$

ce qui donne la preuve de l'indépendance sous μ_s.

7. On sait que

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \lim_{n\to+\infty} \mu_s(\bigcap_{k=1}^{n} A_k^c).$$

Par continuité de $-\log$, cela donne

$$\log\zeta(s) = -\log\frac{1}{\zeta(s)} = \lim_{n\to+\infty} -\log\mu_s(\bigcap_{k=1}^{n} A_k^c).$$

Or les (A_k) sont indépendants, donc d'après l'exercice II, les (A_k^c) sont indépendants, ce qui nous donne

$$\mu_s(\bigcap_{k=1}^{n} A_k^c) = \prod_{k=1}^{n} \mu_s(A_k^c),$$

d'où

$$\begin{aligned}-\log\mu_s(\bigcap_{k=1}^{n} A_k^c) &= \sum_{k=1}^{n} -\log\mu_s(A_k^c)\\ &= \sum_{k=1}^{n} -\log\mu_s(A_k^c)\\ &= \sum_{k=1}^{n} -\log(1-\mu_s(A_k))\\ &= \sum_{k=1}^{n} -\log(1-\frac{1}{k^s})\end{aligned}$$

ce qui nous donne bien

$$\log\zeta(s) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} -\log(1-\frac{1}{p_k^s}).$$

8. Posons $g_n(k) = -\log(1-\frac{1}{p_k^{1+1/n}})$ La suite (g_n) est une suite croissante de fonctions positives, et lorsque n tend vers l'infini, $g_n(k)$ tend vers $g(k) = -\log(1-\frac{1}{p_k})$. Ainsi, d'après le théorème de convergence monotone

$$\int_{\mathbb{N}} g(k)\; dC(k) = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{N}} g_n(k)\; dC(k),$$

soit

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty} -\log(1-\frac{1}{p_k}) &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} -\log(1-\frac{1}{p_k^{1+1/n}})\\ &= \lim_{n\to+\infty} \log\zeta(1+1/n) = +\infty\end{aligned}$$

d'après la question 2. La série de terme général $(-\log(1-\frac{1}{p_k}))_{k\geq 1}$ est donc divergente. Lorsque k tend vers l'infini $-\log(1-\frac{1}{p_k}) \sim \frac{1}{p_k}$, donc d'après le théorème sur les séries à termes positifs équivalentes, la série de terme général $(\frac{1}{p_k})_{k\geq 1}$ diverge également.

FIN