Université de Nancy I **Licence 3**

Nancy-Université
Université Henri Poincaré

Intégration et Probabilités

Examen du 22 octobre 2009

durée 3h

Les documents et calculatrices sont interdits.

Notations et rappels

Notations : Pour E ensemble quelconque, on note $\mathcal{P}_f(E)$ l'ensemble des parties finies de E. Pour $a \in \mathbb{R}$ et $b \subset \overline{\mathbb{R}}$, on note $a + B = \{a + b; b \in B\}$.

On rappelle les théorèmes suivants :

Théorème 1 *Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux familles de parties mesurables de $(\Omega, \mathcal{F})$. On suppose que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont des π-systèmes et que pour tout $(A, B) \in \mathcal{C} \times \mathcal{D}$, on a $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. Alors, les tribus $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$ et $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{D})$ sont indépendantes.*

Théorème 2 *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*
- *Les tribus $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ sont indépendantes*
- *Pour tout $j \in I$, la tribu $\mathcal{A}_j$ est indépendante de la tribu $\sigma(\bigcup_{i \in I \setminus \{j\}} \mathcal{A}_i)$ engendrée par la réunion des autres tribus.*

Le sujet est constitué de 3 exercices indépendants.

****

Exercice I

Soient $(a_n)_{n \geq 1}$, $(b_n)_{n \geq 1}$, deux suites à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$.

1. Montrer que
$$\limsup_{n \to +\infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n \to +\infty} a_n + \limsup_{n \to +\infty} b_n.$$
2. Pour $(u_n)_{n \geq 1}$ suite à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, on note $\mathcal{V}((u_n)_{n \geq 1})$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n \geq 1}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$. On suppose que la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ tend vers le réel a lorsque n tend vers l'infini. Montrer que $\mathcal{V}((a_n + b_n)_{n \geq 1}) = a + \mathcal{V}((b_n)_{n \geq 1})$.
3. En déduire, sous les hypothèses de la question 2, que
$$\limsup_{n \to +\infty} (a_n + b_n) = a + \limsup_{n \to +\infty} b_n.$$
4. On rappelle que $\limsup_{n \to +\infty} \cos n = 1$. Déterminer $\limsup_{n \to +\infty} ((1 + 1/n)^n + \cos n)$.

Exercice II

Dans tout cet exercice, on travaille sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

1. Soit $A \in \mathcal{F}$. Décrire de manière exhaustive la tribu $\sigma(A)$.
2. Soit I un ensemble quelconque. On suppose que pour tout $i \in I$, $A_i \in \mathcal{F}$. Pour $J \in \mathcal{P}_f(I)$, on pose $B_J = \cap_{j \in J} A_j$.
   (a) Montrer que la famille $\mathcal{B} = (B_J)_{J \in \mathcal{P}_f(I)}$ est un π-système, c'est à dire que si $B \in \mathcal{B}$ et $B' \in \mathcal{B}$, alors $B \cap B' \in \mathcal{B}$.
   (b) Montrer que $\sigma(\mathcal{B}) = \sigma((A_i)_{i \in I})$.
3. On reprend les hypothèses de la question précédente et on suppose que l'ensemble $C \in \mathcal{F}$ est tel que pour tout $B \in \mathcal{B}$, $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$. Montrer que les tribus $\sigma((A_i)_{i \in I})$ et $\sigma(C)$ sont indépendantes.
4. Montrer que si les événements $(A_i)_{i \in I}$ sont indépendants sous $\mathbb{P}$, alors les tribus $(\sigma(A_i))_{i \in I}$ sont indépendantes. Indication : on pourra choisir $i_0 \in I$ et appliquer la question précédente à $I' = I \backslash \{i_0\}$.
5. Application : soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite d'événement indépendants sous $\mathbb{P}$. Montrer que les événements $(A_n^c)_{n \geq 1}$ forment une suite d'événements indépendants sous $\mathbb{P}$.

Exercice III

On note $\Omega = \mathbb{N}^*$, que l'on munit de la tribu $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ et de la mesure de comptage C. Pour $k \in \Omega$ et $s > 1$, on pose $f_s(k) = \frac{1}{k^s}$.

1. Pour $s > 1$, on pose $\zeta(s) = \displaystyle\int_\Omega f_s(\omega)\, dC(\omega)$. Montrer que
$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s} < +\infty.$$
2. Montrer que $\lim\limits_{s \to 1^+} \zeta(s) = +\infty$. (On pourra éventuellement utiliser le théorème de convergence monotone).
3. Soit $s > 1$. On note μ_s la mesure sur $(\Omega, \mathcal{F})$ dont la densité par rapport à la mesure de comptage est $k \mapsto \frac{1}{\zeta(s)} f_s(k)$. Vérifier que μ_s est bien définie et que μ_s est une mesure de probabilité, telle que
$$\forall i \in \mathbb{N}^* \quad \mu_s(\{i\}) = \frac{1}{\zeta(s)} \frac{1}{i^s}.$$
4. Soit p un entier naturel non-nul. Montrer que $\mu_s(p\mathbb{N}^*) = \frac{1}{p^s}$.
5. On note $(p_k)_{k \geq 1}$ la suite des nombres premiers. On pose $A_k = p_k \mathbb{N}^*$. Montrer que
$$\{1\} = \bigcap_{k \geq 1} A_k^c.$$
   En déduire soigneusement que
$$\frac{1}{\zeta(s)} = \lim_{n \to +\infty} \mu_s\Big(\bigcap_{k=1}^{n} A_k^c\Big).$$
6. Montrer que les événements $(A_k)_{k \geq 1}$ sont indépendants sous μ_s.
7. A l'aide du résultat de l'exercice II, montrer que
$$\forall s > 1 \quad \log \zeta(s) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} -\log\Big(1 - \frac{1}{p_k^s}\Big).$$
8. Montrer que les séries de terme général respectifs $(-\log(1 - \frac{1}{p_k}))_{k \geq 1}$ et $(\frac{1}{p_k})_{k \geq 1}$ sont divergentes.

FIN