DEVOIR 2

DIPLOME : Licence de Mathématiques	Durée du sujet : 3H
UE : Intégration et Probabilités	Nom du rédacteur : O. GARET
Semestre : 5	
Epreuve de :	■ Seul document autorisé :1 recto/verso A4 manuscrit
Session 2	☐ Documents autorisés
Date : 20 juin 2025	☐ Calculatrices autorisées
Horaire : 09H00–12H00	■ Calculatrice non autorisée

Le sujet est composé de trois parties indépendantes. Tout résultat nécessaire pourra être admis.

Barème indicatif, par partie : I : 6 points ; II : 13 points ; III : 9 points.

Le sujet est long, il n'est pas attendu que les candidats fassent tout, la qualité de l'argumentation est un élément important d'appréciation des copies.

Notations : pour n entier naturel non nul, on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \text{ et } S_n = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{k+\ell}.$$

*** Partie I : Calcul d'une intégrale par un développement en série ***

1. La fonction $x \mapsto \log x$ est-elle intégrable sur $]0,1[$ par rapport à la mesure de Lebesgue ? Justifier.
2. Déterminer la limite de $\int_{]0,1[} \log(x) \frac{x^n}{1+x} \, d\lambda(x)$ lorsque n tend vers l'infini.
3. On pose, pour $x \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k \log(x)$ et
$$f(x) = \frac{\log x}{1+x}.$$
Montrer que $\int_{]0,1[} |f_n - f| d\lambda$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
4. Montrer que
$$\int_{]0,1[} f(x) \, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

*** Partie II : Variables discrètes ***

1. Pour n entier naturel non nul X_n et Y_n sont des variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur l'ensemble fini $\{1, \ldots, n\}$. Montrer que la loi du couple (X_n, Y_n) est la loi uniforme sur $\{1, \ldots, n\}^2$.
2. On pose $Z_n = X_n + Y_n$. Montrer soigneusement que $\mathbb{E}(\frac{1}{Z_n}) = \frac{S_n}{n^2}$.
3. Soit k un entier naturel non nul. Montrer que

$$\mathbb{P}(Z_n = k) = \frac{1}{n}^{2} \cdot \begin{cases} k-1 & \text{si } 2 \leq k \leq n \\ 2n-k+1 & \text{si } n+1 \leq k \leq 2n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

4. Montrer que

$$\mathbb{E}\left(\frac{n}{Z_n}\right) = -\frac{H_n}{n} + \frac{2n+1}{n}(H_{2n} - H_n)$$

5. Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}\left(\frac{n}{Z_n}\right) = 2\log(2)$$

6. Montrer que $S_n \sim 2n \log 2$.

*** Partie III : Variables continues ***

1. Calculer, si elle existe, l'intégrale

$$\int_{]0,1]^2} \frac{1}{x+y}\, d\lambda^{\otimes 2}(x,y)$$

2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$ et f une fonction mesurable de $]0,+\infty[^2$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Justifier que

$$\mathbb{E}(f(X,Y)) = \int_{]0,1]^2} f(x,y)\, d\lambda^{\otimes 2}(x,y).$$

3. On pose $X'_n = \lceil nX \rceil$ et $Y'_n = \lceil nY \rceil$. On pose $f_n(x,y) = \frac{n}{\lceil nx \rceil + \lceil ny \rceil}$. Montrer que

$$\mathbb{E}\left(\frac{n}{X'_n + Y'_n}\right) = \int_{]0,1]^2} f_n(x,y) d\lambda^{\otimes 2}(x,y).$$

4. Déterminer la limite de $\mathbb{E}\left(\frac{n}{X'_n + Y'_n}\right)$.
5. Retrouver le résultat de la partie précédente.

FIN

*** Partie I : Calcul d'intégrale par un développement en série *** 9 points

1. Comme la fonction est continue, de signe constant, l'intégrale est de même nature que l'intégrale impropre $\int_0^1 \log x \; dx$. Or, pour $\varepsilon > 0$, on a

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^1 \log x \; dx &= [x \log x]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 1 \; dx \\ &= -\varepsilon \log \varepsilon - (1-\varepsilon),\end{aligned}$$

qui admet la limite -1 quand ε tend vers 0 : on a donc bien l'intégrabilité.1.5 point

2. Posons $g_n(x) = \log(x)\frac{x^n}{1+x}$. La fonction g_n converge simplement vers 0 sur $]0,1[$, et on a la majoration

$$\forall n \geq 1, x \in]0,1[\quad |g_n(x)| \leq g(x) = |\log x|.$$

Comme g est intégrable, le théorème de convergence dominée s'applique et l'intégrale de g_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini.1.5 point

3. On peut réécrire (somme géométrique)

$$f_n(x) = \frac{1-(-x)^n}{1+x}\log(x) = f(x) + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{1+x}\log x,$$

soit $|f_n - x| = (-\log x)\frac{x^n}{1+x}$. Avec la question précédente, l'intégrale tend vers 0 quand n tend vers l'infini.1.5 point

4. On a montré que f_n converge dans $L^1(\mathbb{R}_+)$ vers f, donc l'intégrale de f_n sur $\mathbb{R}_+$ converge vers l'intégrale de f sur $\mathbb{R}_+$.

   Par linéarité $\int_0^1 f_n \; d\lambda(x) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+1} I_k$, avec $I_k = \int_{]0,1[} -x^k \log x \; d\lambda(x)$. On a déjà vu que $I_0 = 1$. Ensuite, pour $n \geq 1$, la dérivée de $x^n \log x$ est $nx^{n-1}\log x + x^{n-1}$, donc

$$-\varepsilon^n \log \varepsilon = \int_\varepsilon^1 nx^{n-1}\log x + x^{n-1} \; dx,$$

et en faisant tendre ε vers 0, on obtient

$$0 = -nI_{n-1} + \int_0^1 x^{n-1},$$

soit $I_{n-1} = \frac{1}{n^2}$, d'où

$$\int_0^1 f_n \; d\lambda(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{1}{k^2},$$

ce qui donne le résultat voulu en faisant tendre n vers l'infini. 4.5 points

*** Partie II : Variables discrètes *** 13 points

1. Les variables X_n et Y_n sont indépendantes et uniformément distribuées sur $\{1,\ldots,n\}$. Alors, pour tout $(k,\ell)\in\{1,\ldots,n\}^2$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((X_n,Y_n)=(k,\ell)) &= \mathbb{P}(X_n=k,Y_n=\ell)\\ &= \mathbb{P}(X_n=k)\cdot\mathbb{P}(Y_n=\ell)=\frac{1}{n^2}.\end{aligned}$$

   Le couple (X_n,Y_n) suit donc la loi uniforme sur $\{1,\ldots,n\}^2$. 1,5 point

2. On a $Z_n=X_n+Y_n$, donc avec le théorème de transfert

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\frac{1}{Z_n}\right)=\mathbb{E}\left(\frac{1}{X_n+Y_n}\right) &= \sum_{(k,\ell)\in\{1,\ldots,n\}^2}\mathbb{P}((X_n,Y_n)=(k,\ell))\frac{1}{k+\ell}\\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{k+\ell}=\frac{S_n}{n^2}.\end{aligned}$$

   1,5 point

3. On cherche à déterminer la loi de $Z_n=X_n+Y_n$. X_n et Y_n sont indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$, donc pour tout entier naturel k, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z_n=k)=\sum_{j=0}^{k}\mathbb{P}(X_n=j)\mathbb{P}(Y_n=k-j) &= \frac{1}{n^2}\sum_{j=0}^{k}\mathbb{1}_{[1,n]}(j)\mathbb{1}_{[1,n]}(k-j)\\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{j=0}^{k}\mathbb{1}_{[1,n]}(j)\mathbb{1}_{[k-n,k-1]}(j)\\ &= \frac{1}{n^2}|\{0,\ldots k\}\cap\{1\vee k-n,\ldots,n\wedge(k-1)\}|\\ &= \frac{1}{n^2}|\{1\vee k-n,\ldots,n\wedge(k-1)\}|\end{aligned}$$

   avec la convention que $\{a,\ldots,b\}$ désigne l'ensemble vide si $a<b$. Il est bien clair que $\mathbb{P}(Z_n=k)$ est nul si k n'est pas entre 0 et $2n$. En distinguant les cas suivant la position de k par rapport à $n+1$, on a

$$\mathbb{P}(Z_n=k)=\frac{1}{n^2}\cdot\begin{cases}(k-1)-1+1 & \text{si } 2\le k\le n,\\ n-(k-n)+1 & \text{si } n+1\le k\le 2n,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

   Finalement,

$$\mathbb{P}(Z_n=k)=\frac{1}{n^2}\cdot\begin{cases}k-1 & \text{si } 2\le k\le n,\\ 2n-k+1 & \text{si } n+1\le k\le 2n,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

   3 points

4. On applique le théorème de transfert à partir de la loi de Z_n :

$$\mathbb{E}\left(\frac{n}{Z_n}\right) = \frac{1}{n}\mathbb{E}(\frac{1}{Z_n}) = \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\mathbb{P}(Z_n = k)$$
$$= \frac{n}{n^2}\left(\sum_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k} + \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{2n-k+1}{k}\right).$$

On simplifie :

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k} = (n-1)-(H_n-1) \text{ et } \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{(2n-k+1)}{k} = (2n+1)(H_{2n}-H_n)-n.$$

On peut alors établir que

$$\mathbb{E}\left(\frac{n}{Z_n}\right) = -\frac{H_n}{n} + \frac{2n+1}{n}(H_{2n}-H_n).$$

3 points

5. Si on connait le développement asymptotique :

$$H_n = \ln n + \gamma + o(1),$$

on obtient :

$$H_{2n} - H_n \to \ln 2, \qquad \frac{H_n}{n} \to 0, \text{ donc } \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left(\frac{n}{Z_n}\right) = 2\ln 2.$$

Cependant, on peut faire plus simple : $H_n/n \to 0$ est une conséquence du théorère de Cesaro, et

On a :

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}.$$

Faisons le changement d'indice $k = n + j$, pour $j = 1, 2, \ldots, n$:

$$\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k} = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n+j} = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n\left(1+\frac{j}{n}\right)} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{j}{n}}.$$

Cette dernière somme est une somme de Riemann pour la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x}$ sur l'intervalle $[0, 1]$ avec une subdivision régulière de pas $\frac{1}{n}$. Par le théorème de convergence des sommes de Riemann, on a :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{j}{n}} = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \ln(2).$$

On en déduit que :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}(H_{2n} - H_n) = \ln(2).}$$

3 points

6. On a montré que :
$$\mathbb{E}\left(\frac{n}{Z_n}\right) = \frac{S_n}{n},$$
donc :
$$S_n = n \cdot \mathbb{E}\left(\frac{n}{Z_n}\right) \sim n \cdot 2\ln 2 = 2n\ln 2.$$
Ainsi,
$$S_n \sim 2n\ln 2.$$
1 point

Partie III : Variables continues 9 points

1. On veut calculer l'intégrale :
$$\int_{]0,1]^2} \frac{1}{x+y}\, d\lambda^2(x,y).$$
L'intégrande est positive et continue sur $]0,1]^2$. Avec le théorème de Tonelli, on a
$$\begin{aligned}\int_{]0,1]^2} \frac{1}{x+y}\, d\lambda^2(x,y) &= \int_{]0,1]} \left(\int_{]0,1]} \frac{1}{x+y}\, d\lambda(y)\right)\, d\lambda(x)\\ &= \int_{]0,1]} \left(\log(x+1) - \log(x)\right)\, d\lambda(x)\\ &= \int_{]0,1]} \big(F'(x+1) - F'(x)\big)\, d\lambda(x),\end{aligned}$$
où $F(x) = x\log(x)$, prolongée par continuité avec $F(0) = 0$. On en déduit que l'intégrale converge et vaut
$$(F(2) - F(1)) - (F(1) - F(0)) = F(2) = 2\log 2.$$
2 points

2. X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, uniformes sur $[0,1]$, donc à densité. On en déduit qu'elles ont densité conjointe donnée par
$$f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\mathbb{1}_{[0,1]}(y) = \mathbb{1}_{[0,1]^2}(x,y)$$
qui est $\lambda^{\otimes 2}$ presque partout égale à $\mathbb{1}_{]0,1]^2}(x,y)$. On applique alors le théorème de transfert : pour toute fonction mesurable $f :]0,+\infty[^2 \to \overline{\mathbb{R}}_+$, on a :
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f(X,Y)) &= \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, d\mathbb{P}_{(X,Y)}(x,y)\\ &= \int_{\mathbb{R}^2} f_X(x,y)f(x,y)\, d\lambda^{\otimes 2}(x,y) = \int_{]0,1]^2} f(x,y)\, d\lambda^{\otimes 2}(x,y)\end{aligned}$$
2 points

3. On définit :
$$f_n(x,y) = \frac{n}{\lceil nx\rceil + \lceil ny\rceil}.$$
Alors,
$$\mathbb{E}\left(\frac{n}{X'_n + Y'_n}\right) = \mathbb{E}(f_n(X,Y)) = \int_{]0,1]^2} f_n(x,y)\, d\lambda^2(x,y),$$
en vertu du résultat précédent. 1 point

4. Comme $\lceil nx\rceil \geq nx$ et $\lceil ny\rceil \geq ny$, on a
$$0 \leq f_n(x,y) \leq \frac{n}{nx+ny} = \frac{1}{ny}$$
Par ailleurs
$$f_n(x,y) = \frac{1}{\lceil nx\rceil/n + \lceil ny\rceil/n},$$
Or comme $x \leq \frac{\lceil nx\rceil}{n} \leq \frac{nx+1}{n}$, idem pour y,on montre que
$$f_n(x,y) \to \frac{1}{x+y} \text{ pour tout } (x,y) \in]0,1]^2,$$
Avec le théorème de convergence dominée,
$$\mathbb{E}\left(\frac{n}{X'_n + Y'_n}\right) = \int_{]0,1]^2} f_n(x,y)\ d\lambda^{\otimes 2}(x,y)$$
converge vers
$$\int_{]0,1]^2} \frac{1}{x+y}\ d\lambda^{\otimes 2}(x,y) = 2\log 2.$$
quand n tend vers l'infini. 2 points

5. On a $X'_n = \lceil nX\rceil$, donc $X'_n \in \{1,\dots,n\}$. De même pour Y'_n. Montrons que la variable X'_n suit la loi uniforme discrète sur $\{1,\dots,n\}$. Pour $1 \leq k \leq n$,
$$\mathbb{P}(X'_n = k) = \mathbb{P}\left(X \in \left]\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]\right) = \frac{1}{n}.$$
Idem pour Y'_n. On pose $Z'_n = X'_n + Y'_n$. Comme X et Y sont indépendants, X'_n et Y'_n aussi. Ainsi
$$\mathbb{P}_{Z'_n} = \mathbb{P}_{X'_n} * \mathbb{P}_{Y'_n} = \mathbb{P}_{X_n} * \mathbb{P}_{Y_n} = \mathbb{P}_{Z_n} :$$
Z_n et Z'_n ont même loi. En particulier
$$\mathbb{E}(\frac{n}{Z_n}) = \mathbb{E}(\frac{n}{Z'_n}) \to 2\log 2,$$
ce qui permet de retrouver le résultat de la partie précédente. 2 points