DEVOIR 2

DIPLOME : Licence de Mathématiques	Durée du sujet : 3H
UE : Intégration et Probabilités	Nom du rédacteur : O. GARET
Semestre : 5	
Epreuve de :	■ Seul document autorisé :1 recto/verso A4 manuscrit
Session 2	☐ Documents autorisés
Date : 20 juin 2025	☐ Calculatrices autorisées
Horaire : 09H00–12H00	■ Calculatrice non autorisée

Le sujet est composé de trois parties indépendantes. Tout résultat nécessaire pourra être admis.

Barème indicatif, par partie : I : 6 points ; II : 13 points ; III : 9 points.

Le sujet est long, il n'est pas attendu que les candidats fassent tout, la qualité de l'argumentation est un élément important d'appréciation des copies.

Notations : pour n entier naturel non nul, on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \text{ et } S_n = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{k+\ell}.$$

*** Partie I : Calcul d'une intégrale par un développement en série ***

1. La fonction $x \mapsto \log x$ est-elle intégrable sur $]0,1[$ par rapport à la mesure de Lebesgue ? Justifier.
2. Déterminer la limite de $\int_{]0,1[} \log(x)\frac{x^n}{1+x}\, d\lambda(x)$ lorsque n tend vers l'infini.
3. On pose, pour $x \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k \log(x)$ et
$$f(x) = \frac{\log x}{1+x}.$$
Montrer que $\int_{]0,1[} |f_n - f| d\lambda$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
4. Montrer que
$$\int_{]0,1[} f(x)\, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

*** Partie II : Variables discrètes ***

1. Pour n entier naturel non nul X_n et Y_n sont des variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur l'ensemble fini $\{1, \ldots, n\}$. Montrer que la loi du couple (X_n, Y_n) est la loi uniforme sur $\{1, \ldots, n\}^2$.
2. On pose $Z_n = X_n + Y_n$. Montrer soigneusement que $\mathbb{E}(\frac{1}{Z_n}) = \frac{S_n}{n^2}$.
3. Soit k un entier naturel non nul. Montrer que

$$\mathbb{P}(Z_n = k) = \begin{cases} k-1 & \text{si } 2 \leq k \leq n \\ 2n-k+1 & \text{si } n+1 \leq k \leq 2n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

4. Montrer que

$$\mathbb{E}\left(\frac{n}{Z_n}\right) = -\frac{H_n}{n} + \frac{2n+1}{n}(H_{2n} - H_n)$$

5. Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}\left(\frac{n}{Z_n}\right) = 2\log(2)$$

6. Montrer que $S_n \sim 2n \log 2$.

*** Partie III : Variables continues ***

1. Calculer, si elle existe, l'intégrale

$$\int_{]0,1]^2} \frac{1}{x+y} \, d\lambda^{\otimes 2}(x, y)$$

2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$ et f une fonction mesurable de $]0, +\infty[^2$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Justifier que

$$\mathbb{E}(f(X, Y)) = \int_{]0,1]^2} f(x, y) \, d\lambda^{\otimes 2}(x, y).$$

3. On pose $X'_n = \lceil nX \rceil$ et $Y'_n = \lceil nY \rceil$. On pose $f_n(x, y) = \frac{n}{\lceil nx \rceil + \lceil ny \rceil}$. Montrer que

$$\mathbb{E}\left(\frac{n}{X'_n + Y'_n}\right) = \int_{]0,1]^2} f_n(x, y) d\lambda^{\otimes 2}(x, y).$$

4. Déterminer la limite de $\mathbb{E}\left(\frac{n}{X'_n + Y'_n}\right)$.
5. Retrouver le résultat de la partie précédente.

FIN