DIPLOME : Licence de Mathématiques UE : Intégration et Probabilités Semestre : 5 Epreuve de : Session 2 Date : 21 juin 2023 Horaire : 09H00–12H00	Durée du sujet : 3H Nom du rédacteur : O. GARET ■ 1 recto-verso autorisé ☐ Documents non autorisés ☐ Calculatrices autorisées ■ Calculatrice non autorisée

Les calculatrices sont interdites. Comme unique document, un recto-verso au format A4 est autorisé

Exercice 1 Pour $a > 0$, on pose

$$F(a) = \int_{]0,+\infty[} \frac{x}{1+x^2} e^{-ax} \, d\lambda(x).$$

1. Vérifier que la fonction F est bien définie.
2. Montrer que F est strictement décroissante.
3. Étudier les limites aux bornes.
4. Montrer que F est convexe.
5. Montrer qu'il existe un unique $a > 0$ tel que $F(a) = \pi$.

Exercice 2

1. La fonction $x \mapsto \log x$ est-elle intégrable sur $]0,1[$ par rapport à la mesure de Lebesgue ? Justifier.
2. Déterminer la limite de $\int_{]0,1[} \log(x) \frac{x^n}{1+x} \, d\lambda(x)$ lorsque n tend vers l'infini.
3. On pose, pour $x \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k \log(x)$ et
$$f(x) = \frac{\log x}{1+x}.$$
Montrer que $\int_{]0,1[} |f_n - f| d\lambda$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
4. Montrer que
$$\int_{]0,1[} f(x) \, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Exercice 3 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

1. Pour quelles valeurs de α réel la variable $\exp(\alpha X)$ est-elle intégrable ?
2. Déterminer α tel que $\mathbb{E} \exp(\alpha(X+Y)) = 4$.

Exercice 4 On suppose que X suit la loi Bêta $\beta(2,2)$, c'est à dire que X est une variable aléatoire qui prend des valeurs dans $[0,1]$ et admet la densité $f_X(x) = 6x(1-x)\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$.

1. Pour h continue bornée, exprimer $\mathbb{E}(h(X))$ et $\mathbb{E}(h(1-X))$ sous forme d'une intégrale. En déduire que X et $1-X$ ont même loi. On rappellera explicitement l'énoncé du théorème de cours utilisé.
2. Calculer, si elles existent
   (a) $\mathbb{E}(X)$;
   (b) $\mathbb{E}(\frac{1}{X})$;
   (c) $\mathbb{E}(\log(X))$.

FIN

Correction

Solution 1 1. Soit $a > 0$. Pour tout $x > 0$, on a $(x-1)^2 \geq 0$, soit $x^2 + 1 \geq 2x$, ce qui entraîne

$$0 \leq \frac{x}{1+x^2} e^{-ax} \leq \frac{1}{2} e^{-ax}. \tag{1}$$

La fonction $\mapsto \frac{x}{1+x^2} e^{-ax}$, mesurable, positive, dominée par une fonction intégrable sur $\mathbb{R}_+$ est elle-même intégrable, ce qui montre que F est bien définie.1 point

2. Soient a, b avec $0 < a < b$. On a pour tout $x > 0$

$$0 \leq \frac{x}{1+x^2}(e^{-ax} - e^{-bx}),$$

ce qui donne en intégrant

$$F(a) - F(b) \geq 0.$$

La fonction F est donc décroissante sur $]0, +\infty[$. Si $F(a) = F(b)$, alors la fonction intégrée : $x \mapsto \frac{x}{1+x^2}(e^{-ax} - e^{-bx})$ est nulle pour λ-presque tout $x > 0$, donc pour au moins un $x > 0$, ce qui entraîne que $a = b$: la fonction F est strictement décroissante.1.5 point

3. En intégrant l'inégalité (1), on obtient

$$\forall a > 0 \quad 0 \leq F(a) \leq \frac{1}{2a},$$

d'où $\lim_{a \to +\infty} F(a) = 0$.1 point

Comme F est décroissante, on a $\lim_{a \to 0^+} F(a) = \lim_{n \to +\infty} F(1/n)$. Ensuite, en appliquant le théorème de convergence monotone à la suite de fonctions positives $f_n(x) = \frac{x}{1+x^2} e^{-x/n}$, on obtient

$$\lim_{a \to 0^+} F(a) = \lim_{n \to +\infty} F(1/n) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{x}{1+x^2} \, d\lambda(x) = +\infty.$$

(En effet la fonction intégrée est équivalent à $1/x$ en l'infini.)1 point

4. Passons à l'étude de la convexité. Soient $a, b > 0$ et $\theta \in]0, 1[$. On pose $p = 1/\theta$ et $q = 1/(1-\theta)$. Les réels positifs p et q sont exposants conjugués On a

$$\begin{aligned}
&F(\theta a + (1-\theta) b) \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \frac{x}{1+x^2} e^{-(\theta a + (1-\theta) b) x} \, d\lambda(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \left(\frac{x}{1+x^2} e^{-ax} \right)^{\theta} \left(\frac{x}{1+x^2} e^{-bx} \right)^{1-\theta} \, d\lambda(x) \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}_+} \left(\frac{x}{1+x^2} e^{-ax} \right)^{\theta p} \, d\lambda(x) \right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}_+} \left(\frac{x}{1+x^2} e^{-ax} \right)^{(1-\theta) q} \, d\lambda(x) \right)^{1/q}
\end{aligned}$$

avec l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned}
&= F(a)^{\theta} F(b)^{1-\theta} \\
&\leq \frac{1}{p} F(a)^{p\theta} + \frac{1}{q} F(b)^{q(1-\theta)} \qquad \text{avec l'inégalité de Young} \\
&= \theta F(a) + (1-\theta) F(b)
\end{aligned}$$

F est donc convexe.2 points

Une autre solution est d'utiliser le théorème de dérivation sous le signe intégral pour montrer que F est dérivable et avoir une expression intégrale de sa dérivée ; on montre alors comme précédemment que F' est croissante ; elle est donc convexe. C'est moins astucieux que ce qui précède, mais il y a quand même un peu de travail.

5. Comme F est convexe, en particulier elle est continue, et vu les limites respectives en 0 et $+\infty$ (respectivement $+\infty$ et 0), le théorème des valeurs intermédiaires entraîne qu'il existe $a > 0$ tel que $F(a) = \pi$. Comme F est strictement décroissante, il y a unicité.1.5 point

Solution 2 1. Comme la fonction est continue, de signe constant, l'intégrale est de même nature que l'intégrale impropre $\int_0^1 \log x \; dx$. Or, pour $\varepsilon > 0$, on a

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^1 \log x \; dx &= [x \log x]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 1 \; dx \\ &= -\varepsilon \log \varepsilon - (1 - \varepsilon),\end{aligned}$$

qui admet la limite -1 quand ε tend vers 0 : on a donc bien l'intégrabilité.1 point

2. Posons $g_n(x) = \log(x) \frac{x^n}{1+x}$. La fonction g_n converge simplement vers 0 sur $]0, 1[$, et on a la majoration

$$\forall n \geq 1, x \in]0, 1[\quad |g_n(x)| \leq g(x) = |\log x|.$$

Comme g est intégrable, le théorème de convergence dominée s'applique et l'intégrale de g_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini.1 point

3. On peut réécrire (somme géométrique)

$$f_n(x) = \frac{1 - (-x)^n}{1 + x} \log(x) = f(x) + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{1 + x} \log x,$$

soit $|f_n - x| = (-\log x) \frac{x^n}{1+x}$. Avec la question précédente, l'intégrale tend vers 0 quand n tend vers l'infini.1 point

4. On a montré que f_n converge dans $L^1(\mathbb{R}_+)$ vers f, donc l'intégrale de f_n sur $\mathbb{R}_+$ converge vers l'intégrale de f sur $\mathbb{R}_+$.
Par linéarité $\int_0^1 f_n \; d\lambda(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1} I_k$, avec $I_k = \int_{]0,1[} -x^k \log x \; d\lambda(x)$.
On a déjà vu que $I_0 = 1$. Ensuite, pour $n \geq 1$, la dérivée de $x^n \log x$ est $n x^{n-1} \log x + x^{n-1}$, donc

$$-\varepsilon^n \log \varepsilon = \int_\varepsilon^1 n x^{n-1} \log x + x^{n-1} \; dx,$$

et en faisant tendre ε vers 0, on obtient

$$0 = -n I_{n-1} + \int_0^1 x^{n-1},$$

soit $I_{n-1} = \frac{1}{n^2}$, d'où

$$\int_0^1 f_n \; d\lambda(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{1}{k^2},$$

ce qui donne le résultat voulu en faisant tendre n vers l'infini. 3 points

Solution 3 1. La variable $\exp(\alpha X)$ est positive, donc la quantité $\mathbb{E}(\exp(\alpha X))$ a toujours du sens ; éventuellement elle peut être infinie. Avec le théorème de transfert, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\exp(\alpha X)) &= \int_{\mathbb{R}_+} e^{\alpha x}\ d\mathbb{P}_X(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}_+} e^{\alpha x}e^{-x}\ d\lambda(x)\end{aligned}$$

L'intégrale converge si et seulement $\alpha < 1$ et alors l'intégrale vaut $\frac{1}{1-\alpha}$. 1.5 point

2. Comme X et Y sont indépendantes, $\exp(\alpha X)$ et $\exp(\alpha Y)$ le sont aussi. Ainsi

$$\mathbb{E}(\exp(\alpha(X+Y))) = \mathbb{E}(\exp(\alpha X))\mathbb{E}(\exp(\alpha Y)) = (\frac{1}{1-\alpha})^2$$

puisqu'elles ont même loi. On voit que cette espérance fait 4 pour $\alpha = 1/2$.1.5 point

Solution 4 1. Avec le théorème de transfert, on a

$$\mathbb{E}(h(X)) = \int_{\mathbb{R}} h(x)f_X(x)\ d\lambda(x) = \int_0^1 h(x)f_X(x)\ dx.$$

D'autre part, toujours avec le théorème de transfert,

$$\mathbb{E}(h(1-X)) = \int_{\mathbb{R}} h(1-x)f_X(x)\ d\lambda(x) = \int_0^1 h(1-x)f_X(x)\ dx$$

Cependant, on a $f_X(x) = f_X(1-x)$, donc on a aussi

$$\mathbb{E}(h(1-X)) = \int_0^1 h(1-x)f_X(1-x)\ dx = \int_0^1 h(y)f_X(y)\ dy,$$

où la dernière égalité vient du changement de variable $y = 1-x$. Ainsi, pour toute fonction f continue bornée, $\mathbb{E}(f(X)) = \mathbb{E}(f(1-X))$, ce qui montre que X et $1-X$ ont même loi.2 points

2. X, $1/X$ et $\log(X)$ sont toutes les trois de signe constant (positif, positif, négatif), donc les espérances ont toujours un sens, éventuellement elles pourraient être infinies. On a

(a)

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^1 xf_X(x)\ dx = \int_0^1 6x^2(1-x)\ dx = 6(1/3-1/4) = 1/2.$$

1 point

(b)

$$\mathbb{E}(1/X) = \int_0^1 x^{-1}f_X(x)\ dx = \int_0^1 6(1-x)\ dx = 6(1-1/2) = 1/2.$$

1 point

(c)

$$\mathbb{E}(\log(X)) = \int_0^1 \log(x) f_X(x)\ dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 \log(x)(6x - 6x^2)\ dx$$

Or, une intégration par parties donne

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^1 \log(x)(6x-6x^2)\ dx &= [\log(x)3x^2 - 2x^3]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}(3x^2-2x^3)\ dx \\ &= [x\log(x)(3x-2x^2)]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 (3x-2x^2)\ dx\end{aligned}$$

Comme $\lim_{\varepsilon\to 0^+} x\log(x) = 0$, la limite en zéro vaut

$$-\int_0^1 3x - 2x^2\ dx = -(\frac{3}{2} + \frac{2}{3}) = -\frac{5}{6}.$$

2 points