Interrogation de seconde chance, 1h30 minutes

Chassaing-Kurtzmann-Marcovici,

2021-01-21, 10H30-12H00

Barème : 10+3+19=32 points.

Exercice 1. (10=2+7+1 points) On pose :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-xt^2}}{t^2}\, dt.$$

a. Montrer que F est définie et croissante sur $\mathbb{R}_+$.

b. Montrer que $\forall a > 0$, $F \in \mathcal{C}^0([0, a])$, puis montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$, et calculer sa dérivée. On admet que

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \tfrac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

c. Montrer que $\forall x \geq 0$,

$$F(x) = \sqrt{\pi x}.$$

Exercice 2. (3 points) Pour $n \geq 1$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-x/n}}{1 + x^2}\, dx$. Calculer $\lim_n I_n$.

Exercice 3. (19=4+3+3+3+6 points) On se donne une variable aléatoire réelle U de densité $f_U(u) = \mathbb{1}_{[0,1]}(u)$, et on considère le point aléatoire

$$M = M(U) = (X, Y) = (\cos(2\pi U), \sin(2\pi U)),$$

situé sur le cercle unité $\mathfrak{C}$. Le point M a donc pour coordonnées polaires $(R, \Theta) = (1, 2\pi U)$. On supposera dans la suite que la deuxième coordonnée polaire appartient à l'intervalle $[0, 2\pi[$, sauf mention du contraire.

a. Pour $n \geq 2$, montrer que $\mathbb{E}[X^n] = \frac{n-1}{n} \mathbb{E}\left[X^{n-2}\right]$. En déduire $\text{Var}(X)$, $\mathbb{E}\left[X^3\right]$ et $\mathbb{E}\left[X^4\right]$.

b. Étant donnés 2 points B, C de $\mathfrak{C}$, on note $\widehat{BC}$ l'arc de $\mathfrak{C}$ obtenu en parcourant $\mathfrak{C}$ de B à C *dans le sens trigonométrique*, i.e. *dans le sens contraire des aiguilles d'une montre*. On rappelle que la *longueur* d'un arc de $\mathfrak{C}$ est, par définition, la *mesure* de l'angle qui le soustend : par exemple, le périmètre du cercle $\mathfrak{C}$ est 2π. Pour un arc $\widehat{BC}$ de longueur ℓ de $\mathfrak{C}$, montrer que

$$\mathbb{P}\left(M(U) \in \widehat{BC}\right) = \frac{\ell}{2\pi}.$$

On pourra admettre le résultat de cette question pour faire les questions suivantes. **Indication :** On pourra se ramener à une condition sur U, et, pour cela, discuter suivant que le point $A = (1, 0)$ est intérieur à $\widehat{BC}$ ou pas, après avoir fait une figure. Noter éventuellement $(1, \beta)$, resp. $(1, \gamma)$, les coordonnées polaires de B, resp. C.

c. Montrer que la fonction de répartition de X, notée F_X, satisfait :

$$\forall x \in [-1, 1], \ F_X(x) = 1 - \frac{1}{\pi} \arccos(x).$$

En déduire la loi de X.

d. On considère le point P de coordonnées $(1, Z)$ situé à l'intersection de la droite (OM) et de la droite D d'équation $x = 1$. Exprimer Z en fonction de U. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}\left(Z \leq x\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan\left(x\right).$$

En déduire la loi de Z.

e. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. On se donne $a \in \mathbb{R}$. Quelles sont les isométries classiques du cercle qui envoient $M(U)$ sur $M(\{a + U\})$? sur $M(\{a - U\})$? En déduire que U, $\{a + U\}$ et $\{a - U\}$ ont même loi, puis que Z a même loi que $1/Z$.