Examen de 2ème session du 15 Juin 2020, 14H-16H

Chassaing-Karmann-Marcovici

Barème : $6+5+11=22$ *points*. **Durée :** *2 heures.*

Rédaction : à chaque occasion, on indiquera avec soin quel théorème on utilise, et dans quel domaine chaque relation est valable, p.e. $\sqrt{x^2}=x \quad \forall x \geq 0$.

Exercice 1. *(3+3 points).*

1. Soit $k \geq 1$. Montrer que $x \mapsto e^{-kx}\sin x$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et, à l'aide d'intégrations par parties ou par d'autres méthodes, montrer que :
$$\int_0^{+\infty} e^{-kx}\sin x\,dx = \frac{1}{1+k^2}.$$

2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\exp(x)-1}\,dx = \sum_{k\geq 1}\frac{1}{1+k^2}$.

Exercice 2. *(2+3 points).*

1. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on pose :
$$\varphi(x) = \lfloor x \rfloor, \quad \psi(x) = \sum_{k\geq 1} \mathbb{1}_{[k,+\infty[}(x).$$
Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi(x) = \psi(x)$.

2. On se donne un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et une variable aléatoire réelle, positive ou nulle, X, définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Montrer que :

$$\mathbb{E}\left[X\right] = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}\left(X \geq k\right).$$

Exercice 3. *(3+4+4 points).* On se donne un espace mesuré $(E, \mathcal{E}, \mu)$, et une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de densités de probabilités par rapport à μ. On suppose que $(f_n)_{n\geq 1}$ *converge μ–presque partout* vers une densité de probabilité par rapport à μ, notée f, définie sur E. On voudrait en déduire que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge vers f dans $L^1(E, \mathcal{E}, \mu)$.

1. *Partie positive.* Montrer que
$$0 \leq (f - f_n)_+ \leq f.$$
En déduire que
$$\lim_n \int_E (f - f_n)_+ \, d\mu = 0.$$

2. *Partie négative.* En déduire que
$$\lim_n \int_E (f - f_n)_- \, d\mu = 0,$$
puis que
$$\lim_n \int_E |f - f_n| \, d\mu = 0.$$

3. On suppose que $(X_n)_{n\geq 1}$ (resp. X) est une suite de v.a. (resp. une v.a.) à valeurs dans E, de densités respectives $(f_n)_{n\geq 1}$ (resp. f), que ϕ est une fonction mesurable bornée de E dans $\mathbb{R}$ (avec p.e. $|\phi| \leq M \in \mathbb{R}_+$) et que $A \in \mathcal{E}$. Montrer que :
$$\begin{aligned} |\mathbb{E}[\phi(X)] - \mathbb{E}[\phi(X_n)]| &\leq M \|f - f_n\|_1, \\ |\mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(X_n \in A)| &\leq \|f - f_n\|_1. \end{aligned}$$