Intégration et probabilités
Examen du 2019-06-18

Barème : $5 + 10 + 6 + 7 = 28$ *points.* **Durée :** *3 heures.*

Pendant cette interrogation, on pourra utiliser les inégalités suivantes (*sans les démontrer ...*) :

$$\{e^x \geq 1 + x,\ \forall x \in \mathbb{R}\}, \quad \{|\sin(x)| \leq |x|,\ \forall x \in \mathbb{R}\},$$

$$\left\{\sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}},\ \forall a, b \in \mathbb{R}_+^*\right\}, \quad \left\{\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b},\ \forall a, b \in \mathbb{R}_+\right\},$$

$$\{\ln(x) \leq x - 1,\ \forall x > 0\}, \quad \left\{\lambda x + \mu y \geq x^\lambda y^\mu,\ \forall x, y, \lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^*\right\}.$$

Exercice 1. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{n\left(x^{1/n} - 1\right)}{1 + x} dx.$$

Montrer que la suite $(I_n)_{n \geq 1}$ est convergente, et déterminer sa limite, qu'on laissera sous forme intégrale.

Exercice 2. *(1+2+3+1+3 points).*

1. On note, pour $x > 0$,

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \exp(-t) dt.$$

   a. Montrer que la fonction Γ est effectivement définie sur $]0, +\infty[$.
   b. Montrer que, pour $x > 0$, $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$, et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n + 1) = n!$.
   c. Montrer que Γ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, et donner une expression de sa dérivée sous la forme d'une intégrale à paramètre.

2. On considère les deux fonctions d'une variable réelle, F et ζ, données par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt, \quad \zeta(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}.$$

   a. Préciser leur ensemble de définition commun, qu'on notera D.

   b. Montrer que, sur D, $F(x) = \zeta(x) \Gamma(x)$; ζ et F sont-ils C^1 sur D ?

Exercice 3. *Permutations aléatoires (1+2+2+1 points).* Soit n un entier naturel non nul, et soit $U = (U_1, \ldots, U_n)$ un échantillon de densité f, autrement dit, U est une suite de n v.a. i.i.d. de même densité f. Pour toute bijection $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ (bijection de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$), l'application linéaire

$$\mathcal{S}_\sigma : \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (s_1, \ldots, s_n) \mapsto (s_{\sigma(1)}, \ldots, s_{\sigma(n)}) \end{array}$$

est de rang n donc bijective. On note Δ_n l'ensemble :

$$\Delta_n = \{(s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n \; ; \; s_1 < \cdots < s_n\}.$$

1. Démontrer que les vecteurs aléatoires U et $\mathcal{S}_\sigma(U)$, noté U_σ, ont même loi.

2. En déduire que $\mathbb{P}(U_{\sigma(1)} < \cdots < U_{\sigma(n)}) = \mathbb{P}(U_1 < \cdots < U_n)$.

3. Expliquer pourquoi $U \in \bigcup_{\tau \in \mathfrak{S}_n} \mathcal{S}_\tau(\Delta_n)$ presque sûrement.

4. Déduire des deux questions précédentes la valeur de

$$\mathbb{P}(U_1 < \cdots < U_n).$$

Exercice 4. *Calcul d'une densité de la k^e statistique d'ordre. (2+1+4 points).* On note $(U_{(1)}, \dots, U_{(n)})$ les v.a. rangées dans l'ordre croissant. Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $U_{(k)}$ est la $k^{\text{ème}}$ statistique d'ordre, i.e. la $k^{\text{ème}}$ plus petite valeur parmi $U_1, \dots, U_n$[1].

1. Montrer que pour toute fonction Φ borélienne bornée,

$$\mathbb{E}\left[\Phi(U_{(1)}, \dots, U_{(n)})\right] = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathbb{E}\left[\Phi(U_\sigma)\mathbb{1}_{\Delta_n}(U_\sigma)\right].$$

2. En déduire que ψ, définie, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, par :

$$\psi(x) = n! \prod_{i=1}^{n} f(x_i) \quad \mathbb{1}_{\Delta_n}(x),$$

   est une densité du vecteur aléatoire $(U_{(1)}, \dots, U_{(n)})$.

3. On suppose que $f = \mathbb{1}_{[0,1]}$. Montrer que pour toute fonction ϕ borélienne bornée,

$$\mathbb{E}\left[\phi(U_{(k)})\right] = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} \int_0^1 u^{k-1}(1-u)^{n-k}\phi(u)du$$

   Calculer $\mathbb{E}\left[U_{(k)}^{\ell}\right]$ pour ℓ entier naturel.

[1]Il existe au moins une permutation $\tau \in \mathfrak{S}_n$ telle que U_τ soit une suite croissante, et on pose alors $U_{(k)} = U_{\tau(k)}$ (qui ne dépend pas du choix de τ, dans le cas où il y aurait plusieurs bijections τ telles que U_τ soit une suite croissante).