SUJET D'EXAMEN

DIPLOME : Licence	Durée du sujet : 3H
UE : Intégration et Probabilités	Nom du rédacteur : Olivier GARET
Semestre : 5	
Epreuve de :	■ Documents autorisés : 1 recto-verso A4
Session ......2........	☐ Documents non autorisés
Date : 19 juin 2017	☐ Calculatrices autorisées
Horaire : 9H–12H	■ Calculatrice non autorisées

****

Les calculatrices sont interdites. Comme document, une feuille A4 unique, recto-verso, est autorisée.

ON SERA TRÈS VIGILANT À LA QUALITÉ DE LA RÉDACTION.

****

Exercice 1. Pour $a > 0$, on pose

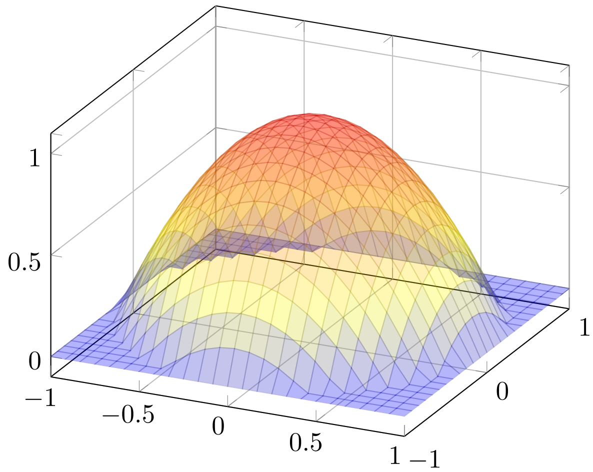
$$F(a) = \int_{]0,+\infty[} \frac{x}{1+x^2} e^{-ax} \, d\lambda(x).$$

Vérifier que la fonction F est bien définie. Étudier les variations, la convexité, les limites aux bornes. Montrer qu'il existe un unique $a > 0$ tel que $F(a) = \pi$.

Exercice 2.

1. La fonction $x \mapsto \log x$ est-elle intégrable sur $]0,1[$ par rapport à la mesure de Lebesgue ? Justifier.
2. Déterminer la limite de $\int_{]0,1[} \log(x) \frac{x^n}{1+x} \, d\lambda(x)$ lorsque n tend vers l'infini.
3. On pose, pour $x \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k \log(x)$ et
$$f(x) = \frac{\log x}{1+x}.$$
Montrer que $\int_{]0,1[} |f_n - f| d\lambda$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
4. Montrer que
$$\int_{]0,1[} f(x) \, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Exercice 3. On considère l'ensemble D de $\mathbb{R}^3$ déterminé par les équations $\begin{cases} z \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 1 - z \end{cases}$.



1. Calculer le volume de D.
2. Le centre de gravité de D est le point de coordonnées (x_G, y_G, z_G), avec

$$\begin{cases} x_G &= \frac{\int_D x \ d\lambda^{\otimes 3}(x,y,z)}{\lambda^{\otimes 3}(D)}, \\ y_G &= \frac{\int_D y \ d\lambda^{\otimes 3}(x,y,z)}{\lambda^{\otimes 3}(D)}, \\ z_G &= \frac{\int_D z \ d\lambda^{\otimes 3}(x,y,z)}{\lambda^{\otimes 3}(D)}. \end{cases}$$

   Montrer que G est le point de cooordonnées $(0, 0, \frac{1}{3})$.
3. Soit (X, Y, Z) un vecteur aléatoire suivant la loi uniforme sur D. Calculer $\mathbb{E}(Z)$, Var (Z).

Exercice 4. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

1. Pour quelles valeurs de α réel la variable $\exp(\alpha X)$ est-elle intégrable ?
2. Déterminer α tel que $\mathbb{E} \exp(\alpha(X + Y)) = 4$.

Solutions

Solution 1 Soit $a > 0$. Pour tout $x > 0$, on a $(x - 1)^2 \geq 0$, soit $x^2 + 1 \geq 2x$, ce qui entraîne

$$0 \leq \frac{x}{1 + x^2} e^{-ax} \leq \frac{1}{2} e^{-ax}. \tag{1}$$

La fonction $\mapsto \frac{x}{1+x^2}e^{-ax}$, mesurable, positive, dominée par une fonction intégrable sur $\mathbb{R}_+$ est elle-même intégrable, ce qui montre que F est bien définie.
Soient a, b avec $0 < a < b$. On a pour tout $x > 0$

$$0 \leq \frac{x}{1+x^2}(e^{-ax} - e^{-bx}),$$

ce qui donne en intégrant

$$F(a) - F(b) \geq 0.$$

La fonction F est donc décroissante sur $]0, +\infty[$. Si $F(a) = F(b)$, alors la fonction intégrée : $x \mapsto \frac{x}{1+x^2}(e^{-ax} - e^{-bx})$ est nulle pour λ-presque tout $x > 0$, donc pour au moins un $x > 0$, ce qui entraîne que $a = b$: la fonction F est strictement décroissante.
En intégrant l'inégalité (1), on obtient

$$\forall a > 0 \quad 0 \leq F(a) \leq \frac{1}{2a},$$

d'où $\lim_{a \to +\infty} F(a) = 0$.
Comme F est décroissante, on a $\lim_{a \to 0^+} F(a) = \lim_{n \to +\infty} F(1/n)$. Ensuite, en appliquant le théorème de convergence monotone à la suite de fonctions positives $f_n(x) = \frac{x}{1+x^2}e^{-x/n}$, on obtient

$$\lim_{a \to 0^+} F(a) = \lim_{n \to +\infty} F(1/n) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{x}{1+x^2}\ d\lambda(x) = +\infty.$$

(En effet la fonction intégrée est équivalent à $1/x$ en l'infini.)
Passons à l'étude de la convexité. Soient $a, b > 0$ et $\theta \in]0, 1[$. On pose $p = 1/\theta$ et $q = 1/(1-\theta)$. Les réels positifs p et q sont exposants conjugués On a

$$\begin{aligned}
F(\theta a + (1-\theta)b) &= \int_{\mathbb{R}_+} \frac{x}{1+x^2} e^{-(\theta a + (1-\theta)b)x}\ d\lambda(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \left(\frac{x}{1+x^2}e^{-ax}\right)^{\theta} \left(\frac{x}{1+x^2}e^{-bx}\right)^{1-\theta}\ d\lambda(x) \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}_+} \left(\frac{x}{1+x^2}e^{-ax}\right)^{\theta p}\ d\lambda(x)\right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}_+} \left(\frac{x}{1+x^2}e^{-ax}\right)^{(1-\theta)q}\ d\lambda(x)\right)^{1/q} \\
&\quad \text{avec l'inégalité de Hölder} \\
&= F(a)^{\theta} F(b)^{1-\theta} \\
&\leq \frac{1}{p}F(a)^{p\theta} + \frac{1}{q}F(b)^{q(1-\theta)} \qquad \text{avec l'inégalité de Young} \\
&= \theta F(a) + (1-\theta)F(b)
\end{aligned}$$

F est donc convexe [1] ; en particulier elle est continue, et vu les limites respectives en 0 et $+\infty$ (respectivement $+\infty$ et 0), le théorème des valeurs in-

1. Une autre solution est d'utiliser le théorème de dérivation sous le signe intégral pour montrer que F est dérivable et avoir une expression intégrale de sa dérivée ; on montre alors comme précédemment que F' est croissante ; elle est donc convexe. C'est moins astucieux que ce qui précède, mais il y a quand même un peu de travail.

termédiaires entraîne qu'il existe $a > 0$ tel que $F(a) = \pi$. Comme F est strictement décroissante, il y a unicité.

Solution 2

1. Comme la fonction est continue, de signe constant, l'intégrale est de même nature que l'intégrale impropre $\int_0^1 \log x \, dx$. Or, pour $\varepsilon > 0$, on a

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^1 \log x \, dx &= [x \log x]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 1 \, dx \\ &= -\varepsilon \log \varepsilon - (1-\varepsilon),\end{aligned}$$

qui admet la limite -1 quand ε tend vers 0 : on a donc bien l'intégrabilité.

2. Posons $g_n(x) = \log(x)\frac{x^n}{1+x}$. La fonction g_n converge simplement vers 0 sur $]0,1[$, et on a la majoration

$$\forall n \geq 1, x \in]0,1[\quad |g_n(x)| \leq g(x) = |\log x|.$$

Comme g est intégrable, le théorème de convergence dominée s'applique et l'intégrale de g_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

3. On peut réécrire (somme géométrique)

$$f_n(x) = \frac{1-(-x)^n}{1+x} \log(x) = f(x) + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{1+x} \log x,$$

soit $|f_n - x| = (-\log x)\frac{x^n}{1+x}$. Avec la question précédente, l'intégrale tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

4. On a montré que f_n converge dans $L^1(\mathbb{R}_+)$ vers f, donc l'intégrale de f_n sur $\mathbb{R}_+$ converge vers l'intégrale de f sur $\mathbb{R}_+$.
Par linéarité $\int_0^1 f_n \, d\lambda(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1} I_k$, avec $I_k = \int_{]0,1[} -x^k \log x \, d\lambda(x)$.
On a déjà vu que $I_0 = 1$. Ensuite, pour $n \geq 1$, la dérivée de $x^n \log x$ est $nx^{n-1} \log x + x^{n-1}$, donc

$$-\varepsilon^n \log \varepsilon = \int_\varepsilon^1 nx^{n-1} \log x + x^{n-1} \, dx,$$

et en faisant tendre ε vers 0, on obtient

$$0 = -nI_{n-1} + \int_0^1 x^{n-1},$$

soit $I_{n-1} = \frac{1}{n^2}$, d'où

$$\int_0^1 f_n \, d\lambda(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{1}{k^2},$$

ce qui donne le résultat voulu en faisant tendre n vers l'infini.

Solution 3 1. On va calculer le volume par tranches horizontales avec le théorème de Tonelli.

La tranche D_z de hauteur z est vide si $z < 0$ ou $z > 1$. Sinon D_z est le disque de centre 0 et de rayon $\sqrt{1-z}$.

On a donc avec Tonelli :

$$\mathrm{Vol}(D) = \int_{[0,1]} \lambda^2(D_z)\ d\lambda(z) \quad = \int_0^1 \pi(1-z)\ dz = \pi \int_0^1 \pi z\ dz = \pi/2$$

2. Les fonctions x, y, z sont mesurables ; bornées sur D qui est borné, car $D \subset [-1,1]^2 \times [0,1]$. Elles sont donc intégrables par rapport à la mesure de Lebesgue et on peut appliquer le théorème de Fubini :

$$\int_D x\ d\lambda^3(x,y,z) = \int_{[0,1]} \left(\int_{D_z} x\ d\lambda^2(x,y) \right)\ d\lambda(z)$$

Par symétrie, on a pour tout z : $\int_{D_z} x\ d\lambda^2(x,y) = 0$, d'où $x_G = 0$, et de même $y_G = 0$.

Enfin

$$\begin{aligned}
\int_D z\ d\lambda^3(x,y,z) &= \int_{[0,1]} \left(\int_{D_z} z\ d\lambda^2(x,y) \right)\ d\lambda(z) \quad = \int_{[0,1]} z\lambda^2(D_z)\ d\lambda(z) \\
&= \int_0^1 z\pi(1-z)\ dz \\
&= \pi(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) = \frac{\pi}{6},
\end{aligned}$$

d'où $z_G = 1/2$.

3. Avec la définition de la loi uniforme sur un compact et le théorème de transfert, on a $\mathbb{E}(Z) = z_G$. De même

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z^2) &= \frac{\int_D z^2\ d\lambda^{\otimes 3}(x,y,z)}{\lambda^{\otimes 3}(D)} \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^1 z^2 \lambda^2(D_z)\ dz \\
&= 2 \int_0^1 z^2(1-z)\ dz \\
&= 2(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

et Var $(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - (\mathbb{E}(Z))^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} = \frac{2-1}{12} = \frac{1}{12}$.

Solution 4 1. La variable $\exp(\alpha X)$ est positive, donc la quantité $\mathbb{E}(\exp(\alpha X))$ a toujours du sens ; éventuellement elle peut être infinie. Avec le théorème de transfert, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\exp(\alpha X)) &= \int_{\mathbb{R}_+} e^{\alpha x} \; d\mathbb{P}_X(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} e^{\alpha x} e^{-x} \; d\lambda(x)
\end{aligned}$$

L'intégrale converge si et seulement $\alpha < 1$ et alors l'intégrale vaut $\frac{1}{1-\alpha}$.

2. Comme X et Y sont indépendantes, $\exp(\alpha X)$ et $\exp(\alpha Y)$ le sont aussi. Ainsi

$$\mathbb{E}(\exp(\alpha(X+Y))) = \mathbb{E}(\exp(\alpha X))\mathbb{E}(\exp(\alpha Y)) = (\frac{1}{1-\alpha})^2$$

puisqu'elles ont même loi. On voit que cette espérance fait 4 pour $\alpha = 1/2$.

FIN