SUJET D'EXAMEN

DIPLOME : Licence	Durée du sujet : 3H
UE : Intégration et Probabilités	Nom du rédacteur : Olivier GARET
Semestre : 5	
Epreuve de :	■ Documents autorisés : 1 recto-verso A4
Session ......2........	☐ Documents non autorisés
Date : 19 juin 2017	☐ Calculatrices autorisées
Horaire : 9H–12H	■ Calculatrice non autorisées

****

Les calculatrices sont interdites. Comme document, une feuille A4 unique, recto-verso, est autorisée.

ON SERA TRÈS VIGILANT À LA QUALITÉ DE LA RÉDACTION.

****

Exercice 1. Pour $a > 0$, on pose

$$F(a) = \int_{]0,+\infty[} \frac{x}{1+x^2} e^{-ax}\, d\lambda(x).$$

Vérifier que la fonction F est bien définie. Étudier les variations, la convexité, les limites aux bornes. Montrer qu'il existe un unique $a > 0$ tel que $F(a) = \pi$.

Exercice 2.

1. La fonction $x \mapsto \log x$ est-elle intégrable sur $]0,1[$ par rapport à la mesure de Lebesgue ? Justifier.
2. Déterminer la limite de $\int_{]0,1[} \log(x) \frac{x^n}{1+x}\, d\lambda(x)$ lorsque n tend vers l'infini.
3. On pose, pour $x \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k \log(x)$ et

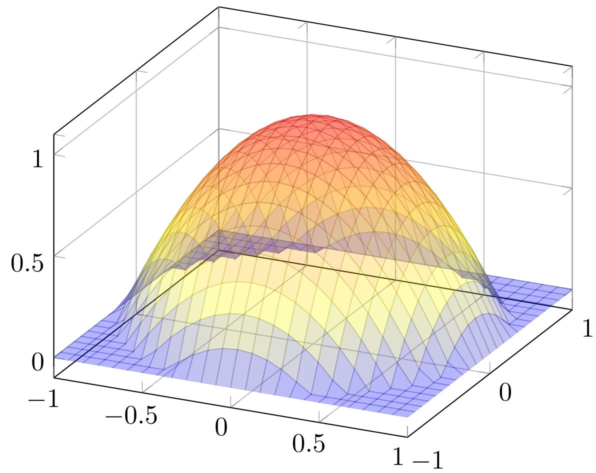
$$f(x) = \frac{\log x}{1+x}.$$

Montrer que $\int_{]0,1[} |f_n - f| d\lambda$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

4. Montrer que

$$\int_{]0,1[} f(x)\, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Exercice 3. On considère l'ensemble D de $\mathbb{R}^3$ déterminé par les équations $\begin{cases} z \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 1 - z \end{cases}$.



1. Calculer le volume de D.
2. Le centre de gravité de D est le point de coordonnées (x_G, y_G, z_G), avec

$$\begin{cases} x_G &= \frac{\int_D x \ d\lambda^{\otimes 3}(x,y,z)}{\lambda^{\otimes 3}(D)}, \\ y_G &= \frac{\int_D y \ d\lambda^{\otimes 3}(x,y,z)}{\lambda^{\otimes 3}(D)}, \\ z_G &= \frac{\int_D z \ d\lambda^{\otimes 3}(x,y,z)}{\lambda^{\otimes 3}(D)}. \end{cases}$$

   Montrer que G est le point de cooordonnées $(0, 0, \frac{1}{3})$.
3. Soit (X, Y, Z) un vecteur aléatoire suivant la loi uniforme sur D. Calculer $\mathbb{E}(Z)$, Var (Z).

Exercice 4. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

1. Pour quelles valeurs de α réel la variable $\exp(\alpha X)$ est-elle intégrable ?
2. Déterminer α tel que $\mathbb{E} \exp(\alpha(X + Y)) = 4$.

FIN