Licence 3

Intégration et Probabilités

Devoir surveillé du 20 juin 2016

durée 3h

****

Les calculatrices et les documents sont interdits.

ON SERA TRÈS VIGILANT À LA QUALITÉ DE LA RÉDACTION.

****

Exercice 1

1. Soit f une fonction mesurable, intégrable sur $[0,1]$ par rapport à la mesure de Lebesgue. Montrer que
$$\int_{[0,1]} f(x)\ d\lambda(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_{]1/n,1]} f(x)\ d\lambda(x).$$
On rappellera précisément les hypothèses du théorème utilisé.

2. On pose $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer qu'il existe une constante réelle γ telle que l'on ait le développement asymptotique lorsque n tend vers l'infini :
$$H_n = \log n + \gamma + o(1).$$

3. Pour x réel, on note $\{x\}$ l'unique réel de $[0,1[$ tel que $x - \{x\} \in \mathbb{Z}$. Montrer que l'intégrale $\int_{]0,1]} \{\frac{1}{x}\}\ d\lambda(x)$ a une valeur finie et que
$$\int_{]0,1]} \{\frac{1}{x}\}\ d\lambda(x) = 1 - \gamma,$$

Exercice 2

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $s(x)$ le plus petit entier strictement supérieur à x. (Ainsi par exemple $s(\pi) = 4$). Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Montrer que la variable aléatoire $Y = s(X)$ suit une loi géométrique de paramètre $1 - e^{-\lambda}$.
2. Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(2016, 1/2)$. On pose $Y = (-2)^X$. Calculer $\mathbb{E}Y$.
3. Soient $X_1, \dots, X_{99}$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Rademacher, c'est à dire que $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1/2$. On pose
$$Z = \prod_{k=1}^{99} (k + X_k).$$
Calculer $\mathbb{E}(Z)$, en prenant bien soin de justifier les calculs.

Exercice 3

1. Montrer que pour tout $t \geq 0$, on a $0 \leq 1 - \cos t \leq \min(\frac{t^2}{2}, 2)$, puis que pour tout $t > 0$, on a $0 \leq \frac{1-\cos t}{t} \leq 1$.
2. Montrer que pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{1-\cos t}{t} e^{-xt}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ par rapport à la mesure de Lebesgue. On pose alors
$$\forall x > 0 \quad F(x) = \int_{]0,+\infty[} \frac{1 - \cos t}{t} e^{-xt} \; d\lambda(t).$$
3. Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$, avec $F'(x) = \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x}$.
Indication : on pourra commencer par prendre $x \in]a, +\infty[$, où on a choisi un réel $a > 0$ quelconque.
4. Montrer que $\lim_{n \to +\infty} F(n) = 0$. En déduire que
$$\forall x > 0 \quad F(x) = \frac{1}{2} \log(1 + x^{-2}).$$
5. On pose pour $x > 0$:
$$G(x) = \int_{]0,+\infty[} \frac{1 - \cos t}{t^2} e^{-xt} \; d\lambda(t).$$
Vérifier que G est bien définie, puis montrer que G est dérivable sur $]0, +\infty[$, avec $G' = -F$.

6. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que
$$\forall x > 0 \quad G(x) = C - \frac{x}{2}\log(1 + x^{-2}) - \operatorname{atan} x.$$
7. Déterminer la valeur de C.
8. Montrer que
$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2}\, dt = \frac{\pi}{2}.$$
(On commencera par montrer que l'intégrale converge.)

FIN

1 Solutions

Exercice 1 8 points

Commentaires lors de partiel 2011:Cet exercice a été très mal réussi, plus de la moitié des copies obtenant la note zéro.

La première question demandait de rédiger de manière détaillée un raisonnement très fréquemment utilisé dans les calculs d'intégrales. Le résultat analogue est une évidence dans la théorie de l'intégrale de Riemann généralisée. Ce n'est pas le cas en théorie de Lebesgue, où il demande un petit raisonnement. On a ici rencontré beaucoup de confusions entre les deux théories, certains n'hésitant pas à affirmer (à tort !) qu'une fonction mesurable est toujours continue.

La deuxième question a eu à peine plus de succès, bien qu'elle ait déjà été traitée en TD. On a lu quelques horreurs comme "v_n tend vers 0 donc la série de terme général v_n converge", "$u_{n+1} - u_n$ tend vers 0 donc la suite u_n converge", ou encore "v_n est bornée, donc v_n converge". Il est très difficile de regagner la confiance du correcteur après avoir écrit de pareilles choses.

Seules les meilleures copies ont traité la troisième question. La majorité des étudiants auraient profit à refaire quelques exercices sur les fonctions "partie entière" et "partie fractionnaire", qui ne semblent pas familières au plus grand nombre.

1. On pose $f_n(x) = \mathbb{1}_{]1/n,1]}(x) f(x)$. On a $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \mathbb{1}_{]0,1]}(x) f(x)$ pour tout $x \in]0,1]$, donc $f_n(x)$ converge λ-presque partout vers $f(x)$ sur $[0,1]$. De plus, on a pour tout $x \in [0,1]$ et pour tout $n \geq 1$: $|f_n(x)| = \mathbb{1}_{]1/n,1]}(x)|f(x)| \leq |f(x)|$. Comme $x \mapsto |f(x)|$ est intégrable

par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$, le théorème de convergence dominée nous dit que

$$\int_{[0,1]} f(x)\ d\lambda(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_{[0,1]} f_n(x)\ d\lambda(x).$$

Or $\int_{[0,1]} f_n(x)\ d\lambda(x) = \int_{[0,1]} \mathbb{1}_{]1/n,1]}(x) f(x)\ d\lambda(x) = \int_{]1/n,1]}(x) f(x)\ d\lambda(x)$, d'où le résultat voulu. 2 points

2. Posons $u_n = H_n - \log n$. On a le comportement suivant

$$\begin{aligned} |u_n - u_{n-1}| &= |(H_n - H_{n-1}) - (\log n - \log(n-1))| \\ &= \left|\frac{1}{n} + \log(1-1/n)\right| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right| = O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Ainsi la série de terme général $u_n - u_{n-1}$ converge, mais on a la relation télescopique $\sum_{k=2}^{n} (u_n - u_{n-1}) = u_n - u_1$, donc la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge. Si on note γ la limite, on a $u_n = \gamma + o(1)$, soit

$$H_n = \log n + \gamma + o(1).$$

3 points

3. Posons

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \{\frac{1}{x}\}\mathbb{1}_{]1/n,1]}(x) = \frac{1}{x}\mathbb{1}_{]1/n,1]}(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \lfloor\frac{1}{x}\rfloor \mathbb{1}_{]\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}]}(x) \\ &= \frac{1}{x}\mathbb{1}_{]1/n,1]}(x) - \sum_{k=1}^{n-1} k\mathbb{1}_{]\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}]}(x) \end{aligned}$$

f_n est une fonction continue par morceaux, donc mesurable. Pour tout x de $]0,1]$, $f_n(x)$ tend vers $f(x) = \{\frac{1}{x}\}$, qui est donc aussi une fonction mesurable. Comme f est bornée par 1, l'intégrale existe. D'après la question 1), l'intégrale de f sur $]0,1]$ est la limite de $\int_{]1/n,1]} f\ d\lambda = \int_{]0,1]} f_n\ d\lambda$. Or,

$$\begin{aligned} \int_{]0,1]} f_n\ d\lambda &= \int_{1/n}^{1} \frac{dx}{x} - \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} k\ dx \\ &= \log n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \\ &= \log n - H_n + 1 \end{aligned}$$

On sait que $H_n - \log n$ admet une limite γ lorsque n tend vers l'infini, appelée . On en déduit que $\int_{]0,1]} \{\frac{1}{x}\}\ d\lambda(x) = 1 - \gamma$.3 points

Exercice 2 6 points

1. X est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ donc $Y = s(X)$ est à valeurs dans $s(\mathbb{R}_+) = \mathbb{N}*$. Il s'agit donc, pour tout $k \in \mathbb{N}*$, de déterminer la valeur de $P(Y = k)$. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y = k) &= \mathbb{P}(s(X) = k) \\
&= \mathbb{P}(X \in [k-1, k[) \\
&= \mathbb{P}_X([k-1, k[) \\
&= \int_{[k-1,k[} d\mathbb{P}_X(t) \\
&= \int_{[k-1,k[} \lambda e^{-\lambda t} d\lambda(t) \\
&= \int_{k-1}^{k} \lambda e^{-\lambda t} dt \\
&= e^{-\lambda(k-1)} - e^{-\lambda k} \\
&= (1 - e^{-\lambda})\left(e^{-\lambda}\right)^{k-1},
\end{aligned}$$

donc Y suit une loi géométrique de paramètre $1 - e^{-\lambda}$.3 points

2. X prend des valeurs entières de 0 à 2016. Donc, d'après le théorème de transfert, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(-2)^k &= \sum_{k=0}^{2016} (-2)^k P(X = k) \\
&= \sum_{k=0}^{2016} \binom{2016}{k} \frac{1}{2^{2016}} (-2)^k \\
&= \frac{1}{2^{2016}} \sum_{k=0}^{2016} \binom{2016}{k} (-2)^k (1)^{2016-k} \\
&= \frac{1}{2^{2016}} (-2+1)^{2016} \\
&= \frac{1}{2^{2016}}
\end{aligned}$$

1 points

3. Une variable aléatoire suivant la loi de Rademacher ne prend qu'un nombre fini de valeurs donc est intégrable. On a

$$\mathbb{E}(X_k) = 1\mathbb{P}(X_k = 1) + (-1)\mathbb{P}(X_k = -1) = \frac{1-1}{2} = 0.$$

Par linéarité, $\mathbb{E}(k+X_k) = k+\mathbb{E}(X_k) = k$. Comme les X_k sont indépendantes, les $k+X_k$ aussi. Or un produit de variable aléatoires intégrables est intégrable et l'espérance du produit est le produit des espérances : on a donc

$$\mathbb{E}(Z) = \prod_{k=1}^{99} \mathbb{E}(k+X_k) = \prod_{k=1}^{99} k = 99!$$

2 points

Exercice 3 15 points

Commentaires lors de partiel 2011:Quelques remarques :

— L'erreur suivante a été fréquemment rencontrée dans la première question : du développement asymptotique $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$, de nombreux étudiants croient pouvoir déduire que pour tout $t \geq 0$, $\cos t \leq 1 - \frac{t^2}{2}$. Il faut retenir qu'un développement asymptotique en $o()$ au voisinage de 0 traduit l'existence d'une limite pour une certaine quantité : on peut, certes, en déduire des inégalités, mais sur un voisinage de 0 dont on ne connait pas l'amplitude : de $f(t) = \frac{t^2}{2} + o(t^2)$, je peux déduire par exemple qu'il existe M tel que

$$\forall t \in [-M, M] \quad f(t) \leq t^2,$$

mais je ne peux donner *a priori* de contrôle sur M.
Par exemple, si $f(t) = f_K(t) = \frac{t^2}{2} + K|t|^3$, j'ai bien $f_K(t) = \frac{t^2}{2} + o(t^2)$, mais je n'ai l'inégalité $f(t) \leq t^2$ que pour $t \in [-\frac{1}{2K}, \frac{1}{2K}]$.

— L'énoncé de la deuxième question a parfois été mal compris : certains s'arrêtent après avoir dit que la fonction que l'on souhaite intégrer est mesurable et positive. Il est vrai que dans ce cas, l'intégrale a toujours un sens si l'on admet qu'elle puisse valoir $+\infty$, mais dans le contexte, il était attendu que l'on montre (à un moment ou à un autre) que la valeur de l'intégrale était finie.

— À la question 6, plusieurs étudiants ont cru pouvoir calculer F à partir de sa dérivée. Rappelons que si $F' = f$ sur un intervalle I et que G est une primitive de f sur I, alors il existe une constance C telle que $F(x) = G(x) + C$ pour tout $x \in I$, mais C n'est pas forcément nul.

— Il faut revoir les théorèmes sur les intégrales dépendant d'un paramètre, en particulier le théorème de dérivabilité.
Certains étudiants croient qu'ils suffit de vérifier l'intégrabilité de $\frac{\partial}{\partial x} f(x,t)$ pour avoir la dérivabilité de $x \mapsto \int \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\, d\lambda(t)$. D'autres,

ont bien compris qu'il faut trouver g avec $|\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)| \leq g(t)$, mais négligent de vérifier l'intégrabilité de g, voire l'affirment contre toute évidence. On a ainsi parfois lu que $t \mapsto \frac{1}{t}$ était intégrable sur $]0,+\infty[$, ou, plus grave, que la fonction constante égale à 1 l'était.

— Établir des inégalités utiles est encore une grosse difficulté pour la grande majorité des étudiants. Il faut se familiariser avec les inégalités classiques et de ne plus se tromper sur le sens des inégalités, par exemple il faut être capable de dire sans hésitation que si $b \geq a$ et $x > 0$, alors $e^{-bx} \leq e^{-ax}$ et non l'inverse. Seule la pratique intensive des exercices, crayon en main, permet de progresser.

1. Pour tout $t \geq 0$, on a $-1 \leq \cos t \leq 1$, ce qui entraîne évidemment $0 \leq 1-\cos t \leq 2$. Pour $x \geq 0$ $\sin x = \int_0^x \cos u \; du \leq \int_0^x 1 \; du = x$, puis $1 - \cos t = \int_0^t \sin x \; dx \leq \int_0^t x \; dx = \frac{t^2}{2}$.
   On a donc bien $0 \leq 1-\cos t \leq \min(\frac{t^2}{2}, 2)$, d'où $\frac{1-\cos t}{t} \leq \min(\frac{t}{2}, \frac{2}{t})$. Si $t \geq 2$, $\frac{2}{t} \leq 1$, sinon $\frac{t}{2} \leq 1$. Dans les deux cas $\min(\frac{t}{2}, \frac{2}{t}) \leq 1$ et donc $0 \leq \frac{1-\cos t}{t} \leq 1$. 2 points
2. Soit $x > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{1-\cos t}{t}e^{-xt}$ est continue sur $]0,+\infty[$, donc mesurable par rapport à la tribu borélienne.
   Comme $|\frac{1-\cos t}{t}e^{-xt}| = \frac{1-\cos t}{t}e^{-xt} \leq e^{-xt}$ et que $\int_{]0,+\infty[} e^{-xt} \; d\lambda(t) = \frac{1}{x} < +\infty$, la fonction $t \mapsto \frac{1-\cos t}{t}e^{-xt}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ par rapport à la mesure de Lebesgue. 1 points
3. Soit $a > 0$. On a $\frac{\partial}{\partial x}\frac{1-\cos t}{t}e^{-xt} = -(1-\cos t)e^{-xt}$, donc

$$\forall x \in]a,+\infty[\quad \forall t \in]0,+\infty[\quad |\frac{\partial}{\partial x}\frac{1-\cos t}{t}e^{-xt}| = (1-\cos t)e^{-xt} \leq 2e^{-at}.$$

   Comme $\int_{]0,+\infty[} 2e^{-at} \; d\lambda(t) = \frac{2}{a} < +\infty$, le théorème de dérivation sous le signe intégrale nous donne la dérivabilité de F sur $]a,+\infty[$, avec

$$F'(x) = \int_{]0,+\infty[} (\cos t - 1)e^{-xt} \; d\lambda(t) = \int_{]0,+\infty[} \cos t \; e^{-xt} \; d\lambda(t) - \frac{1}{x}.$$

   Comme $|e^{it}e^{-tx}| = e^{-tx}$, la fonction $t \mapsto e^{it}e^{-tx}$ est intégrable sur

$]0,+\infty[$:

$$\begin{aligned}\int_{]0,+\infty[} e^{it}e^{-tx}\,d\lambda(t) &= \lim_{M\to+\infty}\int_{]0,M[} e^{it}e^{-tx}\,d\lambda(t)\\ &= \lim_{M\to+\infty}\frac{1-e^{(i-x)M}}{x-i}\\ &= \frac{1}{x-i}\\ &= \frac{x+i}{x^2+1}\end{aligned}$$

On en déduit

$$\Re\int_{]0,+\infty[} e^{it}e^{-tx}\,d\lambda(t) = \frac{x}{x^2+1},$$

soit

$$\int_{]0,+\infty[} \cos t e^{-tx}\,d\lambda(t) = \frac{x}{x^2+1},$$

et finalement $F'(x) = \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x}$ pour tout $x \in]a,+\infty[$. Comme tout $x > 0$ admet un voisinage de la forme $]a,+\infty[$ pour un certain $a > 0$ (par exemple $a = x/2$) , la dérivabilité de F sur $]0,+\infty[$ s'ensuit. 3 points

4. $0 \leq \frac{1-\cos t}{t}e^{-nt} \leq e^{-nt}$, donc en intégrant $0 \leq F(n) \leq \frac{1}{n}$, ce qui entraîne $\lim\limits_{n\to+\infty} F(n) = 0$. Comme $F'(x) = \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x} = \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x}$, une primitive de F sur $]0,+\infty[$ est

$$\frac{1}{2}\log(x^2+1) - \log x = \frac{1}{2}(\log(x^2+1) - \log x^2) = \frac{1}{2}\log(1+x^{-2}),$$

donc il existe K réel tel que

$$\forall x > 0 \quad F(x) = \frac{1}{2}\log(1+x^{-2}) + K.$$

En faisant $x = n$ et en faisant tendre n vers l'infini, on obtient $K = 0$, soit

$$\forall x > 0 \quad F(x) = \frac{1}{2}\log(1+x^{-2}).$$

2 points

5. Comme précédemment $t \mapsto \frac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt}$ est positive, continue, majorée par $t \mapsto e^{-xt}$, donc intégrable. Ainsi G est bien définie.

On a $\frac{\partial}{\partial x}\frac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt} = -\frac{1-\cos t}{t}e^{-xt}$, donc

$$\forall x \in]a,+\infty[\quad \forall t \in]0,+\infty[\quad |\frac{\partial}{\partial x}\frac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt}| = \frac{1-\cos t}{t}e^{-xt} \le e^{-at}.$$

Comme $\int_{]0,+\infty[} e^{-at}\, d\lambda(t) = \frac{1}{a} < +\infty$, le théorème de dérivation sous le signe intégrale nous donne la dérivabilité de G sur $]a,+\infty[$, avec

$$G'(x) = -\int_{]0,+\infty[} \frac{1-\cos t}{t}e^{-xt}\, d\lambda(t) = -F(x).$$

2 points

6. On trouve une primitive de F grâce à une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{2}\log(1+x^{-2})\, dx &= \frac{1}{2}x\log(1+x^{-2}) - \int \frac{x}{2}\frac{-2x^{-3}}{1+x^{-2}}\, dx \\ &= \frac{1}{2}x\log(1+x^{-2}) + \int \frac{1}{1+x^2}\, dx \\ &= \frac{x}{2}\log(1+x^{-2}) + \mathrm{atan} x\end{aligned}$$

Comme $G' = -F$, on en déduit qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x > 0 \quad G(x) = C - \frac{x}{2}\log(1+x^{-2}) - \mathrm{atan}\, x.$$

1 points

7. Comme précédemment, on montre $0 \le G(x) \le \frac{1}{x}$, donc
$\lim_{x\to+\infty} G(x) = 0.$
En $+\infty$, $\log(1+x^{-2}) \sim x^{-2}$, donc $-\frac{x}{2}\log(1+x^{-2}) \sim -\frac{1}{2x}$ et a donc une limite nulle en l'infini. Comme la fonction arctangente a une limite $\pi/2$ en l'infini, on a $\lim_{x\to+\infty} C - \frac{x}{2}\log(1+x^{-2}) - \mathrm{atan}\, x = C - \frac{\pi}{2}$, d'où $C = \frac{\pi}{2}$. 1 points

8. $$\forall x \ge 0 \quad \forall t \in]0,1] \quad 0 \le \frac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt} \le 1.1 = 1$$
$$\text{et } \forall x \ge 0 \quad \forall t > 1 \quad 0 \le \frac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt} \le \frac{1}{t^2}.1 = \frac{1}{t^2}$$

Ainsi

$$\forall x \geq 0 \quad \forall t > 0 \quad 0 \leq \frac{1-\cos t}{t^2} e^{-xt} \leq \mathbb{1}_{[0,1]}(t) + \mathbb{1}_{]1,+\infty[} \frac{1}{t^2}.$$

Comme pour tout $t > 0$, l'application $x \mapsto \frac{1-\cos t}{t^2} e^{-xt}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et que

$$\int_{]0,+\infty[} \mathbb{1}_{[0,1]}(t) + \mathbb{1}_{]1,+\infty[} \frac{1}{t^2} \, d\lambda(t) = 1 + 1 = 2 < +\infty,$$

le théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre nous dit que $x \mapsto \int_{]0,+\infty[} \frac{1-\cos t}{t^2} e^{-xt} \, d\lambda(t)$ est continue. En particulier

$$\int_{]0,+\infty[} \frac{1-\cos t}{t^2} \, d\lambda(t) = \lim_{x \to 0^+} \int_{]0,+\infty[} \frac{1-\cos t}{t^2} e^{-xt} \, d\lambda(t) = \lim_{x \to 0^+} G(x).$$

Évaluons cette limite : on a pour $x > 0$

$$G(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \log(\frac{x^2+1}{x^2}) - \operatorname{atan} x = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \log(1+x^2) + x \log x - \operatorname{atan} x.$$

Comme $\lim_{x \to 0^+} x \log x = 0$, on obtient $\lim_{x \to 0^+} G(x) = \frac{\pi}{2}$, soit

$$\int_{]0,+\infty[} \frac{1-\cos t}{t^2} \, d\lambda(t) = \frac{\pi}{2}.$$

Comme $\frac{1-\cos t}{t^2}$, est continue, positive, intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue, l'intégrale de Riemann impropre existe aussi et coïncide : on a ainsi

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} \, dt = \frac{\pi}{2}.$$

3 points